

Índice

1. Um pouco de cálculo	
1.1 Introdução aos vetores.....	1
1.2 Introdução às derivadas.....	9
1.3 Integração	15
1.4 Interpretação cinemática das derivadas e integrais.....	19
Exercícios.....	21
2. Movimento unidimensional	
2.1 Introdução.....	25
2.2 Classificação dos movimentos unidimensionais.....	30
2.3 Determinação de $x(t)$ a partir de $v(t)$ e de $v(t)$ a partir de $a(t)$	30
2.4 Aceleração constante.....	32
Exercícios.....	34
3. Movimentos bi e tridimensional	
3.1 Introdução.....	35
3.2 Decomposição de movimentos.....	37
3.3 O movimento acelerado.....	38
3.4 Movimentos planos descritos por coordenadas polares.....	43
Exercícios.....	45
4. As leis de Newton	
4.1 Introdução.....	49
4.2 Referenciais.....	53
4.3 Aplicações das leis de Newton.....	54
4.4 Movimento circular.....	63
4.5 Força retardada proporcional à velocidade.....	67
4.6 Forças observadas na natureza.....	69
4.7 Forças inerciais.....	75
Exercícios.....	79

5. Trabalho e energia

5.1 Trabalho e energia cinética.....	85
5.2 Potência.....	90
5.3 Energia potencial.....	90
5.4 Forças conservativas.....	92
5.5 Determinação da força a partir da energia potencial.....	94
5.6 Forças dissipativas.....	95
5.7 Conservação de energia.....	96
5.8 Corpo sob a ação de um potencial arbitrário.....	100
Exercícios.....	101

6. Sistema de partículas. Conservação de momentum

6.1 Centro de massa	107
6.2 Movimento do centro de massa.....	109
6.3 Sistemas onde a massa varia.....	112
Exercícios.....	116

7. Colisões

7.1 Impulso.....	119
7.2 Transporte de momentum para uma superfície. Pressão de um gás.....	121
7.3 Colisão e conservação de momentum.....	123
Exercícios.....	127

8. Dinâmica do corpo rígido

8.1 Introdução	131
8.2 Rotação em torno de um eixo fixo.....	131
8.3 Energia rotacional e momento de inércia.....	134
8.4 Dinâmica da rotação em torno de um eixo fixo.....	142
8.5 Equilíbrio estático de um corpo rígido.....	145
8.6 Aceleração constante.....	147
8.7 Momentum angular.....	152
8.8 Torque e momentum angular de um sistema de partículas.....	154
8.9 Relação trabalho-energia rotacional.....	158
8.10 Conservação do momentum angular.....	159
8.11 Combinação de translação e rotação.....	162
Exercícios.....	167

9. Oscilações

9.1 O movimento harmônico simples.....	175
--	-----

9.2 O sistema massa-mola.....	178
9.3 O sistema massa-mola com gravidade.....	181
9.4 O pêndulo matemático.....	182
9.5 O pêndulo físico.....	184
9.6 Oscilação de dois corpos.....	185
9.7 O sistema mola-cilindro.....	186
9.8 Oscilações amortecidas.....	187
9.9 Oscilações forçadas.....	188
Exercícios.....	192

10. Movimento ondulatório

10.1 Introdução.....	195
10.2 Propagação de pulsos numa corda.....	197
10.3 Ondas sonoras.....	198
10.4 Ondas harmônicas.....	201
10.5 Efeito Doppler.....	202
10.6 Ondas estacionárias.....	205
10.7 Funções de onda no caso estacionário.....	209
10.8 Interferência.....	210
Exercícios.....	212

11. Gravitação

11.1 Introdução.....	215
Exercícios.....	221

12. Mecânica dos fluidos

12.1 Introdução.....	225
12.2 Hidrostática.....	226
12.3 Princípio de Arquimedes.....	229
12.4 Dinâmica dos fluídos.....	231
12.5 Teorema de Bernouilli.....	233
12.6 Viscosidade.....	238
Exercícios.....	241

13. Termologia e termodinâmica

13.1 Introdução.....	245
13.2 Medida da temperatura.....	247
13.3 Equação de estado.....	249

13.4 Interpretação microscópica da temperatura.....	250
13.5 Dilatação térmica.....	252
13.6 Calor e trabalho.....	255
13.7 Transmissão de calor.....	257
Exercícios.....	262

14. Termodinâmica do gás ideal

14.1 Introdução.....	265
14.2 Capacidade térmica.....	268
14.3 Tipos de expansões.....	268
14.4 Método de Rüchhardt para determinação de γ	270
Exercícios.....	272

UM POUCO DE CÁLCULO 1

1.1 Introdução aos vetores

Existem grandezas físicas que podem ser especificadas fornecendo-se apenas um número. Assim, por exemplo, quando dizemos que a temperatura de uma sala é de 20°C temos a informação completa, não sendo necessário nenhum dado adicional. Grandezas deste tipo são conhecidas como *escalares*. Por outro lado, se estivermos discutindo o deslocamento de um corpo, é necessário indicar a distância percorrida entre dois pontos, a direção e o sentido do deslocamento. A grandeza que descreve este movimento é denominada de *vetor* e será o objeto de estudo desta seção. Existem ainda grandezas chamadas *tensores* que necessitam de um número maior de informações, em geral dadas na forma de matrizes, que fogem à abrangência deste texto.

Geometricamente, os vetores são representados por uma seta, cujo comprimento é chamado de módulo (escolhendo-se uma determinada escala). A direção e o sentido da seta fornecem a direção e sentido do vetor. Usualmente, ele é representado por uma letra em negrito (\mathbf{a} , \mathbf{AB} , etc.) ou com uma seta sobre a letra (\vec{a} , \vec{AB} , etc.). Por outro lado, o módulo do vetor é representado apenas por uma letra ou com o vetor colocado entre barras (a , $|\vec{a}|$, $|\vec{AB}|$, etc.)

Consideremos uma partícula deslocando-se de A para B. Este deslocamento é representado por uma seta indo de A até B, como a mostrada na Fig. 1.1(a). O caminho efetivamente seguido pela partícula pode não coincidir com o seu deslocamento (vetor), conforme ilustra a Fig. 1.1(b). Se considerarmos pontos intermediários (P), tais como o mostrado na Fig. 1.1(c),

poderemos eventualmente mapear o trajeto, porém a soma resultante será sempre o vetor \vec{AB} , caracterizado pelo seu módulo (comprimento), direção e sentido. As grandezas vetoriais combinam-se segundo determinadas regras. Assim, no deslocamento da Fig. 1.1 definimos a operação *soma de vetores*, $\vec{AP} + \vec{PB} = \vec{AB}$, que veremos com mais detalhes a seguir.

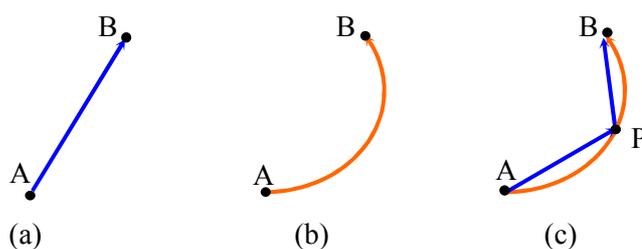


Fig. 1.1 - (a) Vetor descrevendo o deslocamento de uma partícula entre os pontos A e B, (b) trajetória real da partícula e (c) soma de deslocamentos.

Consideremos os vetores \vec{a} e \vec{b} mostrados na Fig. 1.2. O resultado da adição destes dois vetores é a resultante \vec{r} , denotada por $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$. O procedimento empregado para efetuar a adição geométrica de vetores pode ser intuído a partir da Fig. 1.1 e é o seguinte: traça-se (em escala) o vetor \vec{a} e em seguida o vetor \vec{b} com a origem na extremidade de \vec{a} . Une-se a extremidade final de \vec{b} com a origem de \vec{a} e assim temos o vetor soma \vec{r} , como ilustrado na Fig. 1.2.

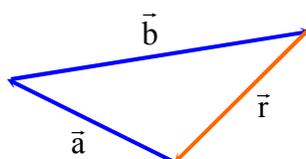


Fig. 1.2 - Adição geométrica dos vetores \vec{a} e \vec{b} .

Usando este procedimento geométrico para a adição de vetores, vemos que esta satisfaz as propriedades comutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ e associativa: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, como indicado na Fig. 1.3.

A subtração de vetores é facilmente introduzida definindo-se o “negativo” de um vetor como sendo o vetor com sentido oposto ao original. Assim, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, como ilustrado na Fig. 1.4. Note que tanto a adição como a subtração podem ser representadas simultaneamente pela construção do paralelogramo representado na Fig. 1.5.

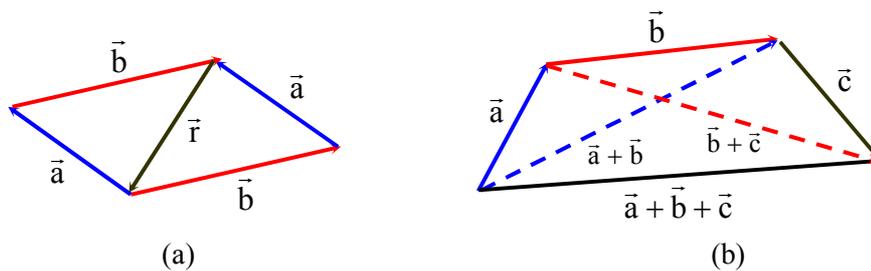


Fig. 1.3 - Propriedades (a) comutativa e (b) associativa.



Fig. 1.4 - Subtração geométrica dos vetores \vec{a} e \vec{b} .

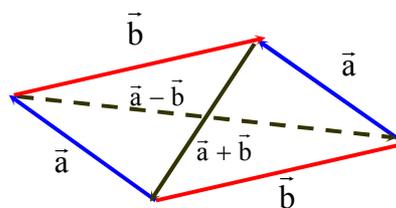


Fig. 1.5 - Regra do paralelogramo para a adição e subtração geométrica dos vetores \vec{a} e \vec{b} .

A adição geométrica de vetores tridimensionais é muito mais difícil e para evitá-la costuma-se utilizar o método analítico, que consiste na decomposição espacial dos vetores e na manipulação individual de seus componentes. A decomposição de um vetor só pode ser efetuada com relação a um sistema de

coordenadas de orientação conhecida no espaço. Considere a decomposição de um vetor no plano, conforme mostra a Fig. 1.6, onde θ é o ângulo entre \vec{a} e o semi-eixo positivo x . Dependendo do ângulo θ , as componentes podem ser positivas ou negativas. Por definição, este ângulo aumenta quando o vetor roda no sentido anti-horário. O conhecimento dos componentes de um vetor é suficiente para especificá-lo completamente, além de possibilitar a manipulação matemática simultânea de vários vetores. De acordo com a Fig. 1.6 temos $a_x = a \cos\theta$ e $a_y = a \sin\theta$, de onde sai que:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = a_y/a_x$$

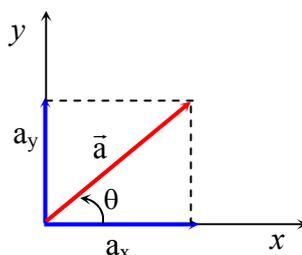


Fig. 1.6 - Decomposição do vetor \vec{a} num sistema de coordenadas cartesianas.

Muitas vezes é conveniente a introdução de um vetor de módulo unitário, chamado *versor*, na direção de um determinado vetor, que pode então ser escrito como $\vec{a} = a\hat{e}_a$. Assim separamos o módulo do vetor (a) de sua direção e sentido (\hat{e}_a). Da mesma forma, é conveniente traçar versores paralelos aos eixos do sistema de coordenadas escolhido, como mostra a Fig. 1.7. Normalmente, no sistema de coordenadas cartesianas eles são chamados de \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} .

Costumamos dizer que estes versores formam uma base completa porque qualquer vetor pode ser expresso como combinação linear deles, da forma:

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

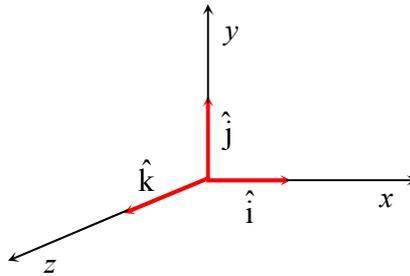


Fig. 1.7 - Versores no sistema de coordenadas cartesianas.

onde $a_x \hat{i}$, $a_y \hat{j}$ e $a_z \hat{k}$ são denominadas de componentes vetoriais do vetor \vec{a} . Note que se estivermos tratando com vetores contidos no plano xy , temos $a_z = 0$. A soma analítica de vetores pode ser efetuada da forma:

$$\begin{aligned} \vec{r} = \vec{a} + \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) + (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) \\ &= (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} + (a_z + b_z) \hat{k} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k} \end{aligned}$$

Assim, $r_x = a_x + b_x$, $r_y = a_y + b_y$, $r_z = a_z + b_z$. Logo: “O vetor resultante tem como componentes a soma das respectivas componentes dos vetores individuais”.

Como exemplo, considere 3 vetores coplanares dados por: $\vec{a} = 2\hat{i} - 1\hat{j}$, $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$ e $\vec{c} = -1.5\hat{i}$. As componentes do vetor resultante são: $r_x = 2 + 3 - 1.5 = 3.5$ e $r_y = -1 + 2 + 0 = 1$, de modo que $\vec{r} = 3.5\hat{i} + 1\hat{j}$. O ângulo θ pode ser encontrado de acordo com:

$$\text{tg } \theta = r_y/r_x = 1/3.5 = 0.286 \Rightarrow \theta = 15.9^\circ$$

e o módulo é:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{(3.5)^2 + 1} = 3.64$$

Uma operação que veremos aparecer com freqüência nos próximos capítulos é a *multiplicação* envolvendo vetores, que pode ser de três tipos:

a) Multiplicação de um vetor por um escalar - resulta num outro vetor paralelo ao primeiro, porém com o módulo multiplicado por uma constante. Se esta constante for negativa existe a inversão do sentido do vetor.

b) Produto escalar - o produto escalar entre \vec{a} e \vec{b} resulta num número (e não num vetor) que é definido como $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi$, onde φ é o ângulo entre eles. Geometricamente, temos o produto do módulo de um vetor pela projeção do outro sobre si. Este tipo de produto aparece no cálculo do trabalho mecânico, potência de uma força, etc.

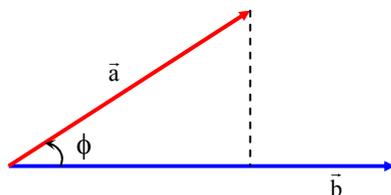


Fig. 1.8 - Produto escalar entre dois vetores \vec{a} e \vec{b} .

c) Produto vetorial - É representado por $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. O vetor resultante tem o módulo dado por $c = ab \sin \varphi$, e direção perpendicular ao plano que contém \vec{a} e \vec{b} . Novamente, φ é o ângulo entre \vec{a} e \vec{b} . O sentido de \vec{c} pode ser determinado pela regra da mão direita, ilustrada na Fig. 1.9. Usa-se a seguinte receita: “Empurre com as pontas dos dedos o vetor \vec{a} no sentido de superposição ao vetor \vec{b} . O polegar indicará o sentido do vetor \vec{c} ”.

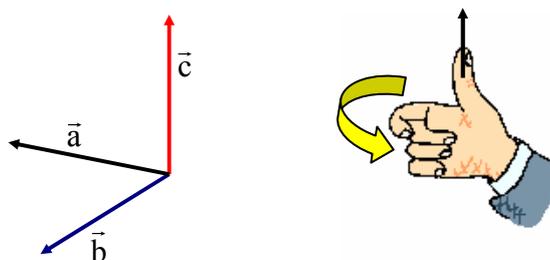


Fig. 1.9 - Regra da mão direita para a realização do produto vetorial.

Ao contrário do produto escalar, o produto vetorial não é comutativo, isto é, ele muda de sinal ao mudarmos a ordem dos vetores, isto é, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Este fato pode ser comprovado pela regra da mão direita.

Algumas propriedades interessantes dos produtos escalar e vetorial são:

1. distributiva (escalar): $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
2. distributiva (vetorial): $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
3. produto misto: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
4. duplo produto vetorial: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$

Para o cálculo do produto vetorial, notamos que: $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$, pois o ângulo entre dois vetores iguais é nulo e $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$ e $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$, como pode ser visto pela regra da mão direita. Vejamos a seguir alguns exemplos de multiplicação vetorial.

- (i) $\vec{a} = 4\hat{i}$ e $\vec{b} = 2\hat{j} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 8\hat{k}$
- (ii) $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ e $\vec{b} = \frac{1}{2}\hat{i} - \hat{j} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (2\hat{i} + 3\hat{j}) \times \left(\frac{1}{2}\hat{i} - \hat{j}\right) =$
 $= \hat{i} \times \hat{i} - 2\hat{i} \times \hat{j} + \frac{3}{2}\hat{j} \times \hat{i} - 3\hat{j} \times \hat{j} = -\frac{7}{2}\hat{k}.$

Uma outra maneira de se fazer o produto vetorial é pelo uso de matrizes. Considere $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ e $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$. Podemos calcular o vetor resultante pela co-fatora da matriz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (6-1)\hat{i} - (4+1)\hat{j} + (-2-3)\hat{k} = 5(\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$$

Este mesmo resultado pode ser encontrado utilizando-se a propriedade distributiva (vetorial).

A variação dos vetores é um fato extremamente importante. Vamos analisar, por exemplo, o movimento circular uniforme, esquematizado na Fig. 1.10.

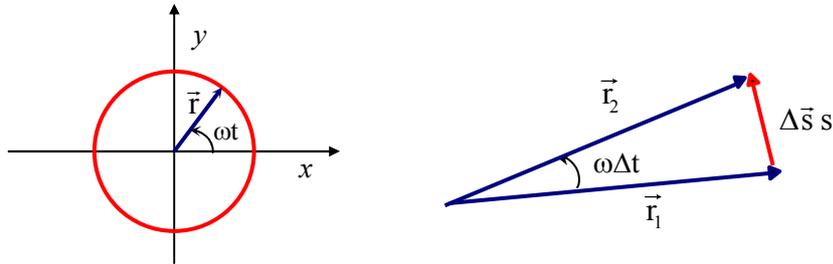


Fig. 1.10 - Representação do movimento circular.

Durante um intervalo de tempo Δt extremamente curto (infinitesimal), a distância percorrida é $\Delta s = \omega r \Delta t$. O vetor velocidade é dado por:

$$\vec{v} = \Delta \vec{s} / \Delta t$$

e para calculá-lo tomamos, de acordo com a Fig. 1.10:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{s} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = r \cos(\omega t + \omega \Delta t) \hat{i} + r \sin(\omega t + \omega \Delta t) \hat{j} \\ &- r \cos \omega t \hat{i} - r \sin \omega t \hat{j} = r [\cos \omega t \cos \omega \Delta t - \sin \omega t \sin \omega \Delta t] \hat{i} \\ &+ r [\sin \omega t \cos \omega \Delta t + \cos \omega t \sin \omega \Delta t] \hat{j} - r \cos \omega t \hat{i} - r \sin \omega t \hat{j} \end{aligned}$$

Para Δt muito pequeno ($\Delta t \rightarrow 0$) temos $\cos \omega \Delta t \approx 1$ e $\sin \omega \Delta t \approx \omega \Delta t$, e assim,

$$\Delta \vec{s} = -r \omega \Delta t \sin \omega t \hat{i} + r \omega \Delta t \cos \omega t \hat{j} \Rightarrow \vec{v} = -r \omega \sin \omega t \hat{i} + r \omega \cos \omega t \hat{j}$$

Desta forma, a variação temporal do vetor posição \vec{r} nos leva a um vetor velocidade \vec{v} que é tangencial à órbita do movimento circular. Note que se definirmos um vetor $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$, podemos escrever

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r \cos \omega t & r \sin \omega t & 0 \end{vmatrix} = -\omega r \sin \omega t \hat{i} + \omega r \cos \omega t \hat{j}$$

Como vemos, o conhecimento de como as grandezas físicas variam é tão importante quanto o conhecimento da própria grandeza. Como o vetor é caracterizado pelo módulo, direção e sentido, ele apresentará variação sempre que um destes elementos mudar. Podemos ter:

a) *Variação do módulo*, como indicado na Fig. 1.11:



Fig. 1.11 – *Variação do módulo de um vetor* .

b) *Variação da direção*, como no movimento circular visto anteriormente:

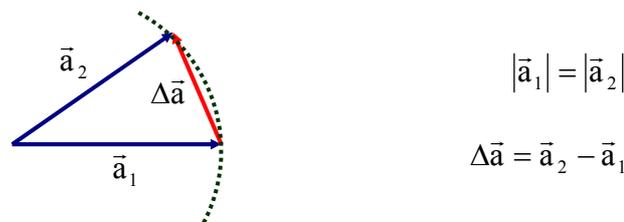


Fig. 1.12 - *Variação da direção de um vetor* .

Este tipo de cálculo que fizemos, considerando a variação do vetor em intervalos pequenos, é extremamente útil em Física e nos leva ao chamado cálculo infinitesimal (válido quando $\Delta t \rightarrow 0$). Abordaremos este tópico a seguir.

1.2 Introdução às derivadas

Em Física, a manipulação matemática das várias grandezas é tão importante quanto o conhecimento da própria grandeza. Nem sempre as operações elementares de álgebra são suficientes para tais manipulações, sendo necessária a introdução de novas operações e conceitos matemáticos. Dentre estes, são de extrema importância os de *derivada* e *integral*.

Como ilustração, consideremos um corpo que se desloca a uma distância Δd num intervalo de tempo Δt . Com estes dados, o máximo que

podemos fazer é calcular a *velocidade média* do corpo no intervalo mencionado. Se quisermos conhecer a *velocidade instantânea* do corpo num determinado ponto de sua trajetória, deveremos analisar seu comportamento nas vizinhanças deste ponto e tão mais exata será a resposta quanto mais limitada for a vizinhança. É comum nesta situação que descrevemos encontrarmos divisões de números quase nulos e, neste caso, tais divisões devem ser feitas de uma maneira especial.

Vamos iniciar a abordagem deste assunto pelo conceito intuitivo de *limite*. Consideremos a função $f(x) = 4x^2 + 1$. Queremos estudar seu comportamento quando a variável x assume valores cada vez mais próximos de 1. Para isto, vamos construir a seguinte tabela:

x	f(x)	x	f(x)
0.6	2.44	1.4	8.84
0.7	2.96	1.3	7.76
0.8	3.56	1.2	6.76
0.9	4.24	1.1	5.84
0.95	4.61	1.01	5.08
0.99	4.92	1.001	5.008

Ela mostra claramente que quando x tende a 1, $f(x)$ tende a 5 e estará mais próximo de 5 quanto menor for a diferença entre x e 1. Este fato é expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$$

que quer dizer que “o limite da função $f(x)$ quando x tende a 1 é 5. Outros exemplos que podemos citar são:

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x) = 1$$

Para funções polinomiais, isto é, funções que tenham dependência do tipo x^n , vale a seguinte propriedade:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Existem outros limites que são um pouco mais difíceis de serem demonstrados e que são melhor discutidos nos livros de Cálculo. Por exemplo temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen } x}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e = 2.718\dots$$

Vamos a seguir usar o conceito de limite para introduzir a operação de diferenciação (derivadas). Seja a função $f(x)$ definida num intervalo do eixo x , no qual o ponto x_0 está contido, como mostra a Fig. 1.13. Chamaremos de *razão incremental* da função $f(x)$ relativa ao ponto x_0 , a quantidade:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

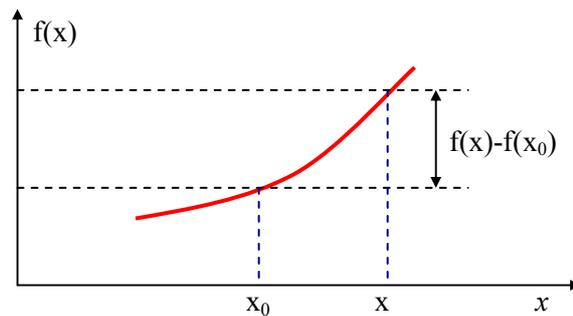


Fig. 1.13 - Definição da razão incremental.

A razão incremental da função $f(x)$ representa o quanto a função é incrementada quando x é variado de x_0 a x . Esta razão pode ser positiva, negativa ou nula dependendo se a função é crescente, decrescente ou constante no intervalo considerado. A derivada de uma função é definida como:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]$$

É também comum escrevermos $f'(x_0) = df/dx$. Fazendo $x = x_0 + \Delta x$, temos:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right]$$

A derivada da função num ponto representa a taxa de variação da função ao nos afastarmos deste ponto. Vamos, a seguir, obter a derivada de algumas funções.

$$\begin{aligned} 1) \quad f(x) = x^2 + 3x &\Rightarrow \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - x^2 - 3x}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x - x^2 - 3x}{\Delta x} = 2x + 3 + \Delta x \end{aligned}$$

$$\text{Logo: } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + 3 + \Delta x) = 2x + 3$$

$$\begin{aligned} 2) \quad f(x) = \sqrt{x} &\Rightarrow \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{E assim, } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned}
 3) f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\
 &= -\operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}
 \end{aligned}$$

onde utilizamos $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, com $a = x + \Delta x/2$ e $b = \Delta x/2$. Desta forma temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} \right] = -\operatorname{sen} x$$

Geometricamente, podemos verificar que a derivada da função $f(x)$ num determinado ponto x_0 representa a tangente do ângulo formado pela reta tangente à curva em x_0 com o eixo das abcissas (x). Este fato está ilustrado na Fig. 1.14. É fácil verificar quando fazemos x tender a x_0 , a reta que passa por estes dois pontos confunde-se cada vez mais com a tangente à curva no ponto x_0 . Logo:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg} \alpha$$

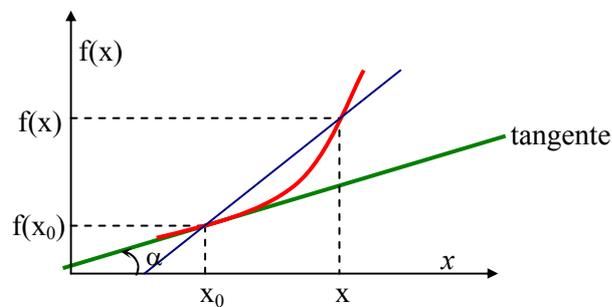


Fig. 1.14 – Interpretação geométrica da derivada.

Uma vez visto o significado matemático da derivada, passemos a apresentação de certas regras que facilitam bastante os cálculos:

1) função constante: $f(x) = c \Rightarrow \frac{df}{dx} = 0$

2) função potência: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ (regra do tombo)

3) função soma: $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

$$\text{Ex.: } f(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 6x$$

4) função produto: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$$\text{Ex.: } f(x) = 3x^2(4x+1) \Rightarrow f'(x) = 6x(4x+1) + 3x^2(4)$$

5) função quociente: $f(x) = u(x)/v(x) \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

6) funções trigonométricas:

$$f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = \text{cos } x$$

$$f(x) = \text{cos } x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen } x$$

$$f(x) = \text{tg } x \Rightarrow f'(x) = \text{sec}^2 x$$

7) função exponencial: $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$

Todas estas propriedades que acabamos de mencionar podem ser demonstradas a partir da definição da derivada em termos da razão incremental. Demonstraremos aqui apenas uma delas, a da função produto $f(x) = u(x)v(x)$, e deixaremos as outras para o curso de Cálculo. Neste caso temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) - u(x + \Delta x)v(x) + u(x + \Delta x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{u(x + \Delta x)[v(x + \Delta x) - v(x)] + v(x)[u(x + \Delta x) - u(x)]}{\Delta x} \end{aligned}$$

Tomando o limite para Δx tendendo a zero:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ u(x + \Delta x) \frac{[v(x + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x} \right\} \\ + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ v(x) \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]}{\Delta x} \right\}$$

de onde obtemos: $f'(x) = u(x) v'(x) + v(x) u'(x)$

Regra da cadeia: Muitas vezes, durante o uso de derivadas em Física, encontramos a situação em que $F(x) = g(y)$, com $y = f(x)$, o que corresponde à chamada função composta, isto é, função de uma outra função. Por exemplo, $F(x) = \text{sen}(x^2)$, de onde temos $g(y) = \text{siny}$ e $y = x^2$. Neste caso, devemos usar a *regra da cadeia*, dada por:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dg}{dy} \frac{dy}{dx}$$

No presente exemplo $F(x) = \text{sen } x^2$, com $g(y) = \text{siny}$ e $y = x^2$. Logo, $dg/dy = \cos y$ e $dy/dx = 2x \Rightarrow F'(x) = 2x \cos(x^2)$

Tomemos um outro exemplo onde $F(x) = (1 + 2x^2 + 3x^3)^4$. Chamando $y = 1 + 2x^2 + 3x^3$, temos $g(y) = y^4$ de forma que a derivada é: $F'(x) = 4y^3 (4x + 9x^2) = 4(1 + 2x^2 + 3x^3)^3 (4x + 9x^2)$

1.3 Integração

Como acabamos de ver, conhecendo-se a função $f(x)$ é possível calcular sua taxa de variação $f'(x)$ (derivada). Uma pergunta lógica a ser feita neste ponto é: conhecendo-se $f'(x)$ é possível encontrar-se $f(x)$, ou em outras palavras, existe a operação inversa, ou anti-derivada? A resposta é sim e a operação inversa denominada integração será discutida a seguir de uma forma bastante intuitiva, deixando-se o rigor matemático para o curso de Cálculo.

Vamos considerar a função $f(x)$ mostrada na Fig. 1.15 e supor conhecidas as derivadas em todos os pontos x (x_0, x_1, x_2, \dots). Pela definição de taxa de variação (ou razão incremental) temos:

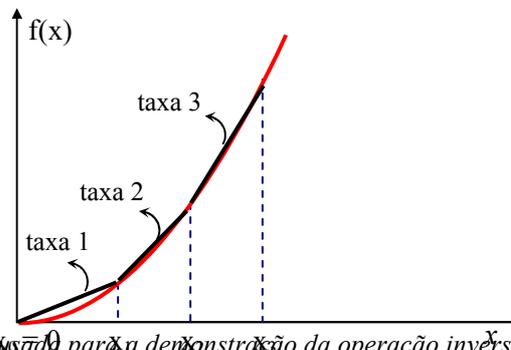


Fig. 1.15 – Função $f(x)$ usada para a demonstração da operação inversa da derivada.

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \text{taxa 1}$$

tal que $f(x_1) = f(x_0) + \text{taxa 1} \cdot (x_1 - x_0)$. Assim, conhecendo-se a taxa de variação e a função no ponto x_0 , temos condições de determinar a função no ponto x_1 . Da mesma forma, conhecendo-se a função no ponto x_1 e a taxa 2, que é a taxa entre x_1 e x_2 , podemos determinar a função em x_2 . Se dividirmos o eixo x em vários intervalos sucessivos nos quais conhecemos a taxa de variação da função $f(x)$, podemos mostrar que:

$$f(x_n) = f(x_0) + \text{taxa 1} \cdot (x_1 - x_0) + \text{taxa 2} \cdot (x_2 - x_1) + \dots + \text{taxa n} \cdot (x_n - x_{n-1})$$

de forma que podemos encontrar a função $f(x)$ e sabermos as várias taxas de variação ao longo do eixo x . Vamos, a seguir, tomar todos os intervalos com o mesmo tamanho, ou seja:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = \Delta x$$

de modo que:

$$f(x_n) = f(x_0) + (\text{taxa 1} + \text{taxa 2} + \dots + \text{taxa n}) \cdot \Delta x$$

Tomando o limite em que Δx tende a zero, as várias taxas de variação transformam-se nas derivadas, de modo que:

$$f(x_n) = f(x_0) + \sum_{\text{todos } \Delta x\text{'s}} \left(\frac{df}{dx}\right)\Delta x$$

Como fizemos $\Delta x \rightarrow 0$, temos agora um número infinito de intervalos e, conseqüentemente, infinitos termos na somatória. Além disto, estamos somando números df/dx que *variam continuamente*. Neste caso, ao invés de usarmos a soma \sum de números discretos, introduzimos a operação \int , denominada integração, que representa uma soma contínua. A partir desta definição, podemos escrever:

$$f(x_n) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_n} \left(\frac{df}{dx}\right)dx$$

onde usamos $dx \equiv \Delta x$ como notação no caso em que $\Delta x \rightarrow 0$. Como vemos, esta operação permite encontrar-se $f(x)$ a partir de $f'(x)$ e por isso dizemos que a *integração* é a operação inversa da *diferenciação*. Se quisermos, por exemplo, calcular a integral:

$$I = \int x^m dx = \int \left(\frac{1}{m+1}\right) \frac{d}{dx} (x^{m+1}) dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

onde a constante C está representando $f(x_0)$, que deve ser conhecido. A regra acima é bastante importante na integração de polinômios. Alguns exemplos simples são:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int (x^2 + x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$\int (5x^7 + 8x) dx = \frac{5}{8} x^8 + 4x^2 + C$$

A integral de uma determinada função também possui uma interpretação geométrica como no caso da derivada. Para vermos tal

interpretação, vamos considerar $\int_{x_0}^{x_n} g(x) dx$. Para cada ponto x , multiplicamos o valor da função $g(x)$ por uma largura dx mostrada na Fig. 1.16 (infinitesimalmente pequena) e somamos todos os produtos. Em cada ponto temos a área de um retângulo infinitesimal de base dx e altura $g(x)$. Baseados neste fato, podemos interpretar geometricamente a integral de uma função $g(x)$ como sendo a área sob a curva, isto é, $\int_{x_0}^{x_n} g(x) dx = \text{área sob a função } g(x)$ entre os pontos x_0 e x_n .

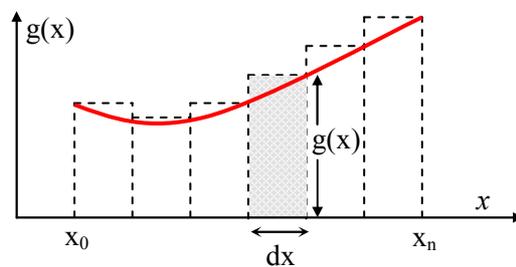


Fig. 1.16 - Interpretação geométrica da integral.

Podemos verificar este fato calculando a integral de $g(x) = 4x$ entre 0 e 1, e comparando o valor obtido com a área da função neste intervalo. Temos:

$$\int_0^1 4x dx = 4 \int_0^1 x dx = 4 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = 2 \cdot (1 - 0) = 2$$

Nesta última passagem introduzimos os *limites de integração*, substituindo a constante de integração C .

$$\int_a^b g(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Calculando a área do triângulo sombreado da Fig. 1.17 obtemos: área = $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$, que coincide com o resultado obtido por integração.

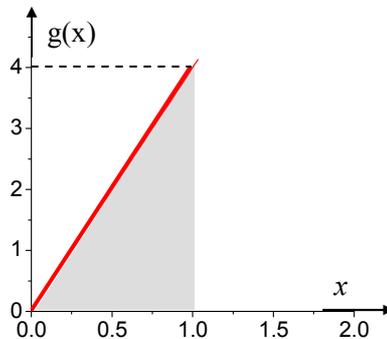


Fig. 1.17 – Área da função $g(x) = 4x$ entre 0 e 1.

Algumas propriedades importantes das integrais são:

- (1) $\int c g(x) dx = c \int g(x) dx$ onde c é uma constante
- (2) $\int [g_1(x) + g_2(x)] dx = \int g_1(x) dx + \int g_2(x) dx$
- (3) $\int \text{sen} x dx = \int \frac{d}{dx} (-\cos x) dx = -\cos x + C$
- (4) $\int \cos x dx = \int \frac{d}{dx} (\text{sen} x) dx = \text{sen} x + C$

1.4 Interpretação cinemática das derivadas e integrais

Na cinemática encontramos várias aplicações do cálculo de derivadas e integrais. Analisando o movimento de um corpo, estas idéias fluem espontaneamente dos argumentos físicos. Vamos considerar um corpo deslocando-se numa trajetória S , conforme mostra a figura abaixo. Chamamos de i e f os pontos inicial e final do movimento. O conhecimento específico da trajetória não é suficiente para predizermos a velocidade do corpo para cada posição. É necessário o conhecimento das posições sucessivas $S(t)$ com o decorrer do tempo. Suponha que a trajetória do corpo seja dividida em pedaços $\Delta \vec{s}$, como mostra a Fig. 1.18. Um $\Delta \vec{s}$ particular liga o ponto S_j ao ponto S_{j+1} e o intervalo de tempo decorrido para que o corpo execute este deslocamento é Δt . A velocidade média neste intervalo de tempo é $\vec{v} = \Delta \vec{s} / \Delta t$. Esta velocidade será tão mais próxima da velocidade real

(instantânea) do corpo na posição S_j quanto mais próximos forem os pontos j e $j + 1$. Isto ocorre porque neste caso $\Delta \vec{s}$ confunde-se cada vez mais com a trajetória real do corpo. No limite em que Δt (e consequentemente, $\Delta \vec{s}$) tende a zero, temos a definição da velocidade instantânea:

$$\vec{v}_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

que é derivada da posição em relação ao tempo. Suponha agora que queremos encontrar a distância total percorrida pelo corpo. Isto pode ser feito dividindo-se a trajetória em pequenos segmentos ΔS_j e realizando a soma $\sum \Delta S_j$.

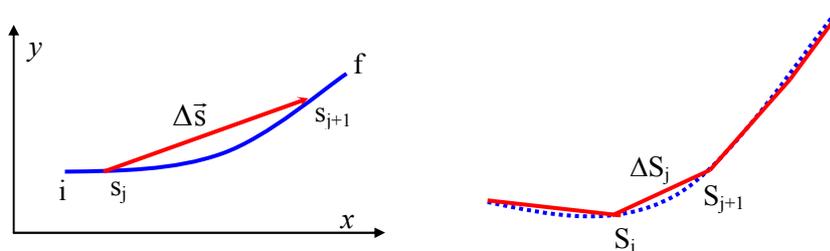


Fig. 1.18 - Corpo deslocando-se numa trajetória S .

É óbvio que quanto menores forem os segmentos ΔS_j , mais a soma acima se aproximará da distância real percorrida pelo corpo, porque, novamente, quanto menores forem os ΔS_j , melhor eles se encaixam na trajetória. No limite em que $\Delta S_j \rightarrow 0$ eles se confundem completamente com a trajetória e assim:

$$\text{distância percorrida} = \lim_{\Delta S_j \rightarrow 0} \sum \Delta S_j$$

É usual no caso em que $\Delta S_j \rightarrow 0$ definirmos $\Delta S = ds$ e substituímos a somatória pela integral:

$$\text{distância percorrida} = \int_{S_i}^{S_j} ds$$

Exercícios

- 1 – Uma sala tem dimensões $3 \times 4 \times 5 \text{ m}^3$. Uma mosca parte de um de seus cantos e voa para o canto diametralmente oposto. Qual é o módulo do deslocamento? Poderia sua trajetória ser menor do que este deslocamento? Escolha um sistema de coordenadas convenientes e escreva este deslocamento na forma vetorial.
- 2 – Considere os vetores $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ e $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$. Mostre que $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ e que $\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$.
- 3 – Podemos combinar dois vetores de módulos diferentes e ter resultante nula? E no caso de 3 vetores?
- 4 – Considere um corpo em movimento cujo vetor posição é dado (em cm) por $\vec{r} = 3 \cos \omega t \hat{i} + 4 \sin \omega t \hat{j}$. Usando procedimento semelhante ao utilizado no texto para o movimento circular, a) mostre num gráfico em escala o vetor \vec{r} num determinado instante t ; b) após um intervalo de tempo Δt pequeno, mostre no mesmo gráfico o novo vetor \vec{r} ; c) calcule o deslocamento $\Delta \vec{s} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ sofrido pelo corpo no intervalo Δt ; d) calcule $\vec{v} = \Delta \vec{s} / \Delta t$ e verifique sua orientação para $\omega t = 0, \pi/2, \pi$ e $3\pi/2$; e) calcule $\vec{r} \cdot \vec{v}$ e discuta o resultado; f) calcule $\vec{r} \times \vec{v}$ e discuta o resultado.
- 5 – Considere os vetores $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ e $\vec{b} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$.
- determine: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{a} \times \vec{b}$.
 - qual é a componente de \vec{a} paralela a \vec{b} ?
 - qual é a componente de \vec{a} perpendicular a \vec{b} ?
- 6 – Considere o vetor \vec{a} do problema anterior.
- faça um gráfico em escala mostrando o vetor e os ângulos θ e ϕ , definidos na Fig. 1.19.
 - calcule o módulo do vetor e os valores de θ e ϕ .
 - calcule a componente de \vec{a} paralela ao versor $\hat{e} = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})/\sqrt{3}$.
 - calcule a componente perpendicular a este vetor.

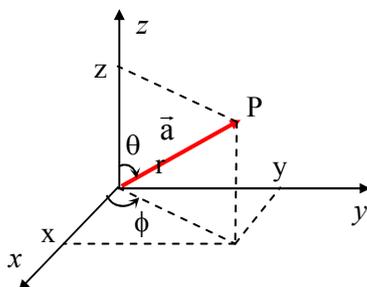


Fig. 1.18

- 7 – Faça a adição e subtração geométrica dos seguintes vetores:
 $\vec{a} = 2\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j}$ e $\vec{b} = -3\hat{i} + \frac{3}{2}\hat{j}$.
- 8 – Faça os produtos escalar e vetorial dos vetores: $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$
e $\vec{b} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$.
- 9 – Encontre a projeção do vetor $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ na direção paralela ao versor
 $\hat{e} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})/3$. Faça o mesmo para a projeção perpendicular.
- 10 – Mostre que o produto vetorial $\vec{v} \times \vec{r}$ é um vetor constante quando o movimento é circular.
- 11 – Mostre que $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$ para o movimento circular. O que isto significa?
- 12 – Calcule a derivada das seguintes funções:
- $f(x) = 3x^2 + 1$
 - $f(x) = \text{sen}x/x^2$
 - $f(x) = e^x (1 + x^2 + x^3)$
 - $f(x) = (x^2 + 2)/(x^3 + 3)$
- 13 – Calcule a derivada das funções acima nos pontos:
- $x = 0$
 - $x = \pi$
 - $x = 0$
 - $x = 1$

14 – Procure num “handbook” de matemática:

- a) a derivada de $f(x) = \ln x$
- b) a integral de $f(x) = 1/x$

15 – Determinar a derivada das seguintes funções:

- a) $y = 4x^5$
- b) $y = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 2$
- c) $y = \sin x + \cos x$
- d) $y = x^2 + 1$
- e) $y = x \sin x$
- f) $y = 1/x^2$
- g) $y = 2x/(x^2 + 1)$
- h) $y = x e^x$
- i) $y = \cotg x$
- j) $y = \sqrt{x}$
- k) $y = 1/\sqrt{x}$

16 – Calcule as derivadas das funções:

- a) $f(x) = \operatorname{tg} x$
- b) $f(x) = e^{ax}$ (no ponto $x = 0$)
- c) $f(x) = \sin 2x$ (no ponto $x = \pi$)
- d) $f(x) = x^n + \cos x$
- e) $f(x) = \sin(\cos x)$
- f) $f(x) = e^{\sin x}$ (no ponto $x = 0$)

17 – Calcule $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. *Sugestão:* Faça $x = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow 1 + x^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta =$

$\sec^2 \theta$. Por outro lado, $dx/d\theta = \sec^2 \theta \Rightarrow dx = \sec^2 \theta d\theta$. Como $x = \operatorname{tg} \theta$, os limites de integração ficam: quando $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$ e quando $x = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4$.

18 – Calcule as seguintes integrais indefinidas:

- a) $I = \int 3x dx$
- b) $I = \int (7x^2 + 4x^3 - 2) dx$

$$c) I = \int (-15x^{10} + 8x^2) dx$$

19 – Calcule as integrais definidas:

$$a) I = \int_0^{\pi} (3 \operatorname{sen} x + \cos x) dx$$

$$b) I = \int_{-1}^1 (5 + 2x^2) dx$$

$$c) I = \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$d) I = \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x \cos x dx$$

20 - Considere a parábola $y = 2x^2 + x - 3$.

- Usando o conceito de derivada, encontre a posição x_0 que corresponde ao extremo (máximo ou mínimo);
- Substitua o valor de x_0 na equação da parábola para encontrar o valor de y_0 ;
- Complete quadrados para encontrar os pontos do vértice, x_0 e y_0 ;
- Encontre os pontos para os quais a parábola cruza o eixo x ;
- Faça um esboço (gráfico com poucos detalhes) da parábola;
- Usando integração, encontre a área sob a parábola compreendida entre os pontos 1 e 2.

MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL 2

2.1 Introdução

Dentre os vários movimentos que iremos estudar, o movimento unidimensional é o mais simples, já que todas as grandezas vetoriais que descrevem o movimento são paralelas. Como o movimento ocorre em apenas uma dimensão, é necessária apenas uma coordenada para especificar a posição de um corpo em cada instante de tempo.

Consideremos um corpo que no instante t_1 encontra-se na posição x_1 . Após um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, o corpo estará na posição x_2 no instante de tempo t_2 . Definimos o *deslocamento* como sendo $\Delta x = x_2 - x_1$ e a *velocidade média* do corpo neste intervalo de tempo como:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

O sentido do deslocamento do corpo é dado pelo sinal do próprio deslocamento ou da velocidade média (são proporcionais). Geometricamente, a velocidade média entre os pontos x_2 e x_1 corresponde à inclinação da reta que passa por estes pontos, conforme mostra a Fig. 2.1.

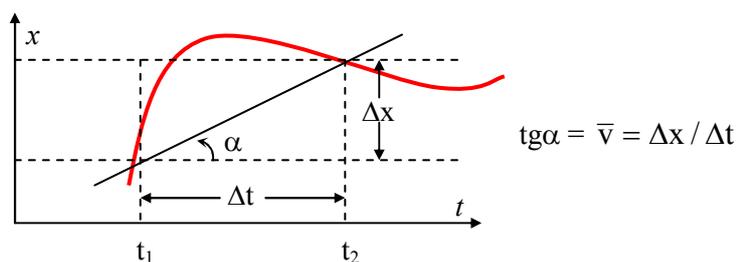


Fig. 2.1 - Posição de um corpo com função do tempo.

Quanto menor for o intervalo de tempo considerado, isto é, quanto mais próximos estiverem os pontos x_1 e x_2 , mais fielmente \bar{v} representará a velocidade real do corpo naquele intervalo de tempo. Logo, a *velocidade instantânea* (real) é definida como:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

que nada mais é do que a derivada da posição com relação ao tempo. Geometricamente, se tivermos um gráfico de posição contra tempo, a velocidade instantânea corresponde à inclinação da reta tangente à curva num determinado instante de tempo, como ilustra a Fig. 2.2.

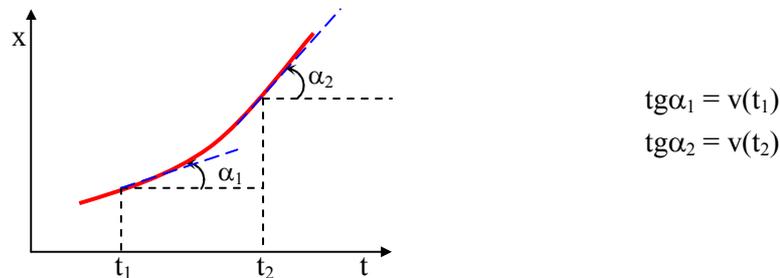


Fig. 2.2 - Interpretação geométrica da velocidade instantânea.

Quando a velocidade instantânea é constante num determinado intervalo de tempo, dizemos que o movimento é *uniforme* e que $v(t) = \bar{v}$. Por outro lado, quando a velocidade não é constante no tempo, o movimento é chamado de *acelerado*. Neste caso, a variação da velocidade com o tempo é caracterizada por uma grandeza denominada aceleração. Se a velocidade do corpo no instante t_1 é v_1 e no instante t_2 é v_2 , a aceleração média é definida como:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

e no gráfico de velocidade contra tempo ela corresponde à inclinação da reta que passa pelos pontos v_1 e v_2 . Quando consideramos o limite em que Δt tende

a zero, surge a idéia de *aceleração instantânea*, grandeza esta que caracteriza localmente a variação da velocidade do corpo. Logo:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Geometricamente, a aceleração é a inclinação da reta tangente à curva no gráfico de velocidade, como mostra a Fig. 2.3.

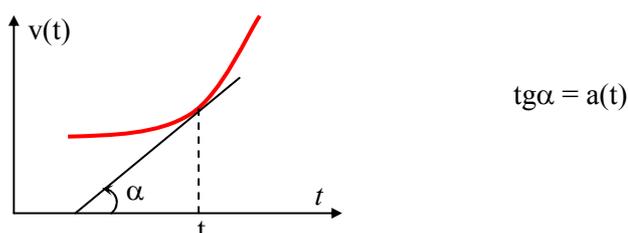


Fig. 2.3 – Interpretação geométrica da aceleração instantânea.

O movimento do corpo pode ser classificado de acordo com a maneira em que a aceleração se comporta no tempo. Quando a aceleração é constante, o movimento é chamado de *uniformemente acelerado* e se constitui numa classe importante de situações que analisaremos. Antes de prosseguirmos, vamos mostrar alguns exemplos dos conceitos que acabamos de ver.

Exemplo 1 : Seja um corpo deslocando-se de tal forma que sua posição é dada por $x(t) = 4t^2$, com t dado em s e x em cm. Na Fig. 2.4(a) vemos o gráfico desta função. A velocidade do corpo em cada instante de tempo pode ser encontrada tomando-se a derivada de $x(t)$ e assim,

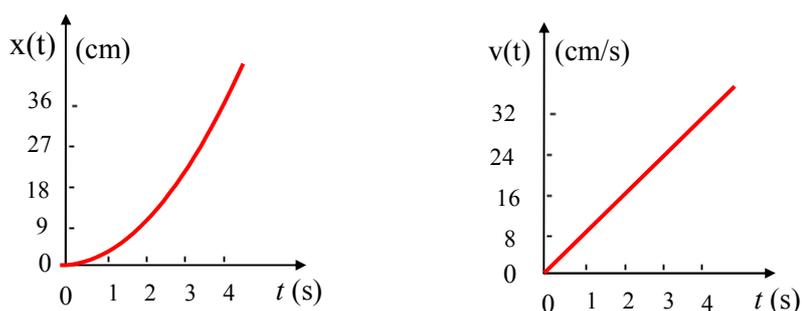


Fig. 2.4 - Posição (a) e velocidade (b) de um corpo como função do tempo.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 8t \quad (\text{em cm/s})$$

que é a equação da linha reta mostrada na Fig. 2.4(b). Se quisermos calcular a aceleração como função do tempo, devemos tomar a derivada de $v(t)$ que é obviamente uma constante.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 8 \text{ cm/s}^2$$

A velocidade média do corpo entre os instantes $t = 1\text{ s}$ e $t = 3\text{ s}$ pode ser calculada através da expressão:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(3) - x(1)}{3 - 1} = \frac{36 - 4}{2} = 16 \text{ cm/s}$$

Este mesmo resultado poderia ser obtido da seguinte forma:

$$\bar{v} = \frac{v(3) + v(1)}{2} = \frac{24 + 8}{2} = 16 \text{ cm/s}$$

ou seja: “A velocidade média é a média das velocidades nos instantes considerados”. Este é um resultado que só vale para um movimento cuja aceleração é constante.

Exemplo 2: O movimento de um corpo é descrito por $x(t) = 3t^2 + 4t + 1$, sendo esta função mostrada na Fig. 2.5. A posição inicial do corpo é $x_0 = 1$ cm e pelo gráfico vemos que nos instantes iniciais do movimento, o deslocamento se dá no sentido positivo do eixo x , até atingir um ponto máximo a partir do qual o movimento se inverte, ocorrendo a partir daí no sentido negativo do eixo x .

Queremos responder à seguinte pergunta: quanto tempo o corpo leva para voltar à posição inicial? Para isto fazemos $x(t) = 1$, isto é,

$$-3t^2 + 4t + 1 = 1 \Rightarrow -3t^2 + 4t = 0 \Rightarrow t(-3t + 4) = 0$$

de onde tiramos que o corpo está na posição $x = 1$ nos instantes $t = 0$ (posição inicial) é $t = 4/3$ s, que corresponde ao tempo necessário para a partícula voltar à posição inicial.

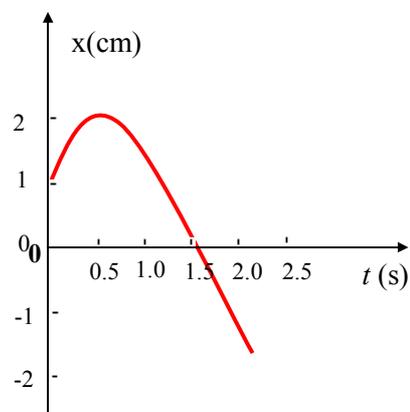


Fig. 2.5 - Posição de um corpo como função do tempo.

A velocidade é dada por $v(t) = dx/dt = -6t + 4$ (cm/s), que está mostrada na Fig. 2.6. Notamos que: $v > 0$ para $t < 2/3$ s, $v = 0$ para $t = 2/3$ s e $v < 0$ para $t > 2/3$ s. O gráfico da velocidade do corpo corresponde à uma reta com coeficiente angular negativo. O tempo $t = 2/3$ s define o ponto de retorno. A aceleração é dada por:

$$a = \frac{dv}{dt} = -6 \text{ cm/s}^2$$

e é no sentido oposto ao da velocidade na fase inicial ($t < 2/3$ s).

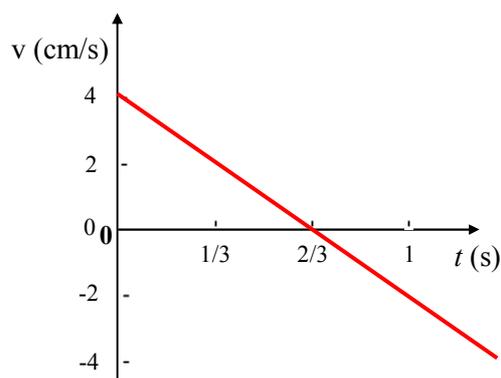


Fig. 2.6 - Velocidade de um corpo como função do tempo.

2.2 Classificação dos movimentos unidimensionais

O movimento unidimensional é classificado de acordo com as variações da posição, velocidade e aceleração com o decorrer do tempo. Assim, temos os seguintes tipos de movimentos:

- Progressivo:* $x(t)$ aumenta com o tempo;
Retrógrado: $x(t)$ diminui com o tempo;
Acelerado: $v(t)$ e $a(t)$ tem o mesmo sentido;
Retardado: $v(t)$ e $a(t)$ tem sentidos opostos.

No exemplo anterior (Exemplo 2), a classificação do movimento é: $t < 2/3s \rightarrow$ movimento progressivo e retardado e $t > 2/3s \rightarrow$ movimento retrógrado e acelerado.

2.3 Determinação de $x(t)$ a partir de $v(t)$ e de $v(t)$ a partir de $a(t)$

Como vimos anteriormente, o conhecimento de $x(t)$ permite o cálculo de $v(t)$ através de uma derivação e também $a(t)$ através de outra derivação. O problema inverso consiste na determinação de $x(t)$ a partir de $v(t)$ ou $a(t)$. Para isto, temos que realizar uma *integração*, pois estamos procurando a função cuja derivada é conhecida. Assim,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \left(\frac{dx}{dt} \right) dt = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Conhecendo-se a velocidade do corpo, determinamos sua posição como função do tempo através de uma integração simples. Lembre-se que o que estamos fazendo nada mais é do que dividir o intervalo de tempo total em pequenos intervalos dt nos quais a velocidade é considerada constante. O produto $v dt$ fornece a pequena distância percorrida (ou deslocamento sofrido) em dt e a soma deles, que é a operação de integração, fornece o deslocamento total do corpo. Num gráfico de $v(t)$ contra t , o deslocamento do corpo é a área sob a curva, como mostrado na Fig. 2.7. Note que área negativa indica deslocamento no sentido negativo do eixo x .

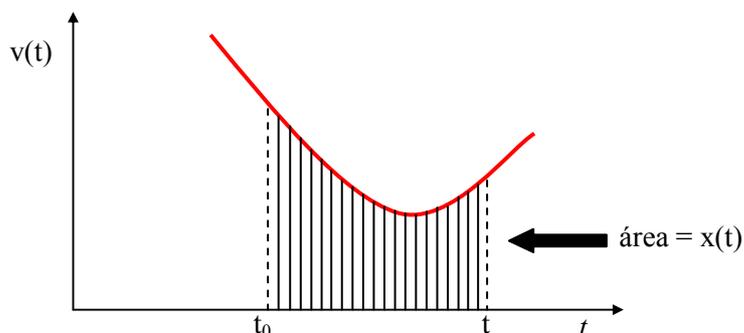


Fig. 2.7 - Cálculo da posição a partir da velocidade de um corpo.

Exemplo 1: A velocidade de um corpo é dada por: $v(t) = 3t + 4$ e sabemos que para $t = 0$ ele localiza-se em $x_0 = 1$. Vamos calcular $x(t)$. Assim,

$$x(t) = 1 + \int_0^t (3t + 4) dt = \frac{3}{2}t^2 + 4t + 1$$

Exemplo 2: Dado $a(t) = 3t$, calcular $v(t)$ e $x(t)$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t 3t dt = v_0 + \frac{3}{2}t^2$$

Vemos que para conhecer $v(t)$ precisamos saber a velocidade inicial. Para achar $x(t)$ fazemos:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt = x_0 + \int_0^t \left(v_0 + \frac{3}{2}t^2 \right) dt = x_0 + v_0 t + \frac{t^3}{2}$$

Deste exemplo podemos concluir que para a determinação de $v(t)$ a partir de $a(t)$ é necessário o conhecimento do valor inicial v_0 da velocidade. A determinação precisa de $x(t)$ a partir de $v(t)$ implica no conhecimento da posição x_0 inicial. x_0 e v_0 são denominados de condições iniciais do movimento.

2.4 Aceleração constante

Este caso envolve um número grande de problemas e, assim, devemos trata-lo em particular. Sendo a aceleração constante, podemos calcular a velocidade como:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a \, dt = v_0 + a \int_0^t dt = v_0 + at$$

e o deslocamento através de outra integração:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) \, dt = x_0 + \int_0^t (v_0 + at) \, dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Podemos eliminar t da primeira equação: $t = (v - v_0)/a$ e substituí-lo na segunda:

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{a}(v - v_0) + \frac{1}{2} a \frac{(v - v_0)^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$a(x - x_0) = v_0 v - v_0^2 + \frac{1}{2}(v^2 + v_0^2 - 2vv_0) = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$$

Logo: $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$, que é conhecida como *equação de Torricelli*, válida apenas quando a aceleração é constante.

Um caso especial do movimento uniformemente acelerado ocorre para $a = 9.81 \text{ m/s}^2 = g$, que corresponde ao movimento vertical de corpos sujeitos ao campo gravitacional da Terra, próximos à superfície. Neste caso, é comum tratar o deslocamento como altura (h) e adotar o sentido positivo de h como sendo oposto ao de g .

Exemplo: Uma bola é lançada para cima, com velocidade inicial v_0 como mostra a Fig. 2.8. Assim, usando a equação de Torricelli temos:

$$v^2(h) = v_0^2 - 2gh \Rightarrow v(h) = \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

Para um determinado h , existem duas soluções para v . A positiva representa o corpo em ascensão e a negativa o corpo está na descendente. Vemos também que o ponto de retorno ($v = 0$) ocorre para uma altura máxima

$h_{\max} = v_0^2 / 2g$ mostrada na Fig. 2.9. Por outro lado, a dependência temporal é dada por $v(t) = v_0 - gt$ e $h(t) = \frac{1}{2} gt^2$

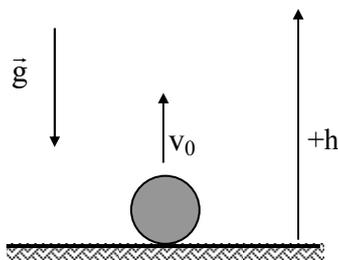


Fig. 2.8 – Lançamento vertical de uma bola.

Ao atingir o ponto máximo da trajetória, $v = 0$ e $t_{\max} = v_0/g$. Logo: $h_{\max} = v_0^2 / 2g$ como obtido anteriormente. Para a obtenção do tempo total da trajetória fazemos $h(t_f) = 0 \Rightarrow 0 = t(v_0 - \frac{1}{2} gt)$ que nos dá duas soluções: $t_i = 0$ (início do movimento) e $t_f = 2v_0^2/g$ que é o dobro do tempo gasto para que a bola atinja h_{\max} .

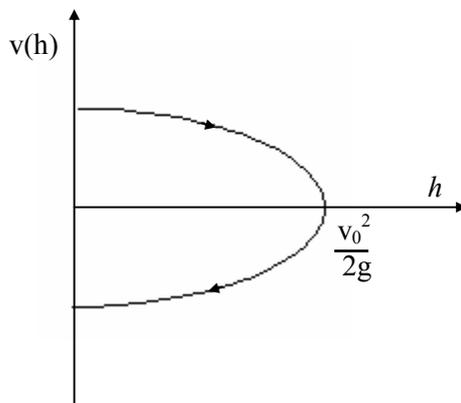


Fig. 2.9 – Dependência da velocidade com a altura no lançamento vertical.

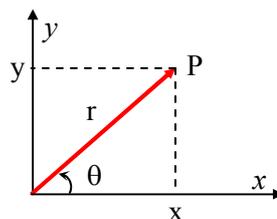
Exercícios

- 1 – O maquinista de um trem movendo-se com velocidade v_1 , $v\hat{e}$, a uma distância d à sua frente, um trem cargueiro movendo-se no mesmo sentido com velocidade v_2 . Ele aciona os freios, transmitindo ao trem uma aceleração $-a$. Mostre que se: $d > (v_1 - v_2)^2/2a$ não haverá colisão e se $d < (v_1 - v_2)^2/2a$ haverá colisão.
- 2 – Gotas de água caem de um chuveiro sobre o piso situado a 2 m abaixo. As gotas caem em intervalos regulares e quando a primeira atinge o chão, a quarta está começando a cair. Determine a posição de todas as gotas no instante em que uma tinge o chão.
- 3 – A posição de uma partícula que se desloca ao longo do eixo x depende do tempo de acordo com a equação: $x = at^2 - bt^3$, x em cm, t em s.
 - a) em que ponto x é máximo?
 - b) qual é a velocidade e em que instante ela é nula?
 - c) qual é a aceleração e em que instante ela é nula?
- 4 – Um avião com velocidade v_0 aterriza num porta-aviões com uma aceleração negativa $a = -A\sqrt{t}$. Qual é o comprimento mínimo da pista?
- 5 – Dois corpos localizam-se na origem do eixo x quando $t = 0$ s. O corpo A tem velocidade constante de 2 m/s. O corpo B está inicialmente em repouso mas sujeito a uma aceleração constante de 1 m/s^2 .
 - a) represente esquematicamente, num mesmo gráfico, as posições dos corpos A e B como função do tempo.
 - b) qual é o instante de tempo em que ocorrerá a colisão?
 - c) qual é a posição x em que isto ocorrerá?
 - d) qual é a velocidade do corpo B no instante da colisão?
 - e) em que instante de tempo as velocidades dos dois corpos serão iguais?

MOVIMENTOS BI E TRIDIMENSIONAL 3

3.1 Introdução

O movimento unidimensional que vimos no capítulo anterior é um caso particular de uma classe mais ampla de movimentos que ocorrem em duas ou três dimensões. Se o movimento de um corpo está completamente restrito a um plano, ele é denominado movimento plano ou bidimensional. Neste caso, a posição é especificada através de coordenadas polares (r, θ) ou cartesianas (x, y), como indicadas na Fig. 3.1.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

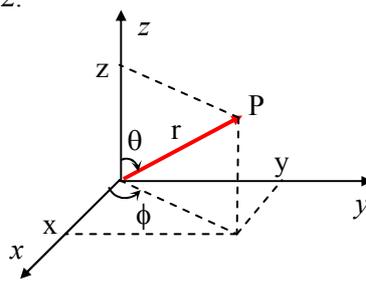
$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\operatorname{tg} \theta = y/x$$

Fig. 3.1 – Posição de um corpo no plano xy .

Para o caso do movimento no espaço (3 dimensões) a posição do corpo é especificada em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) ou cartesianas (x, y, z), indicadas na Fig. 3.2.



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{x^2 + y^2} / z$$

$$\operatorname{tg} \phi = y / x$$

Fig. 3.2 - Posição de um corpo no espaço.

Para movimentos planos e espaciais, as grandezas cinemáticas (\vec{r} , \vec{v} e \vec{a}) não são necessariamente paralelas como acontece no movimento unidimensional. Desta forma, é de importância fundamental tratar estas grandezas vetorialmente.

Se no tempo t_1 a posição do corpo for descrita pelo vetor posição \vec{r}_1 e no tempo t_2 , pelo vetor posição \vec{r}_2 , podemos dizer que o deslocamento sofrido pelo corpo é dado por $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ onde $\Delta\vec{r}$ não é necessariamente a distância percorrida pelo corpo. Havendo um deslocamento $\Delta\vec{r}$ num intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, podemos definir as velocidades média (\vec{v}_m) e instantânea (\vec{v}) da forma:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Vemos que a velocidade sempre existirá quando houver mudanças no módulo e/ou direção do vetor posição. A variação temporal de um vetor pode ser analisada através da variação temporal de suas componentes, da forma:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \Rightarrow \vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

e isto pode ser feito porque os versores \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} não variam com o tempo.

Exemplo: Vamos determinar a velocidade de um corpo cujo vetor posição é dado por: $\vec{r} = 4t^2\hat{i} + 3t\hat{j}$. Tomando-se as derivadas temporais das componentes de \vec{r} temos:

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt = 8t\hat{i} + 3\hat{j}$$

Vamos usar este exemplo para demonstrar uma relação importante. Podemos escrever:

$$\vec{r}(t + \Delta t) = 4(t + \Delta t)^2 \hat{i} + 3(t + \Delta t) \hat{j} = 4t^2 \hat{i} + 3t \hat{j} + 8t\Delta t \hat{i} + 3\Delta t \hat{j} + 4(\Delta t)^2 \hat{i}$$

No caso em que Δt é muito pequeno, $(\Delta t)^2 \ll \Delta t$ e o termo $(\Delta t)^2$ pode ser desprezado. Assim,

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta \vec{r} = \vec{r}(t) + \vec{v} \Delta t$$

e dizemos que esta é uma aproximação de primeira ordem em Δt , já que o termo $(\Delta t)^2$ foi desprezado. A aceleração do corpo é definida como:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

e, portanto, sempre haverá aceleração quando houver mudanças do vetor velocidade, seja em módulo, direção ou sentido.

Exemplo: A velocidade de um corpo é dada por $\vec{v}(t) = 3t^2 \hat{i} + t \hat{j} + t^3 \hat{k}$. Logo, a aceleração é dada por $\vec{a}(t) = 6t \hat{i} + \hat{j} + 3t^2 \hat{k}$

3.2 Decomposição de movimentos

Do fato que $\vec{v} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$ tiramos que $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ e $v_z = dz/dt$, de modo que se olharmos para cada componente, o movimento do corpo pode ser analisado independentemente, ou seja, a velocidade na direção x só depende da variação da coordenada x com o tempo, etc. Este resultado pode ser generalizado e o movimento espacial de um corpo pode ser tratado independentemente em cada uma das três direções. Resumindo, temos o chamado princípio da independência dos movimentos ou *princípio de Galileu*:

“Quando um corpo se encontra sob a ação simultânea de dois ou mais movimentos, cada um se processa como se os demais não existissem”.

Em outras palavras, a posição do móvel depois de um intervalo de tempo sob a ação do movimento composto é a mesma que resultaria se o móvel se deslocasse por etapas em cada direção. Como um exemplo típico,

consideremos o caso de um barco com velocidade v_b atravessando um rio cuja correnteza tem velocidade v_r . O barco percorrerá uma trajetória que consiste em deslocar-se $v_r t$ na direção do rio e $v_b t$ na direção perpendicular, como mostra a Fig. 3.3. Assim, $\vec{r} = v_r t \hat{i} + v_b t \hat{j}$ e $\vec{v} = v_r \hat{i} + v_b \hat{j}$.

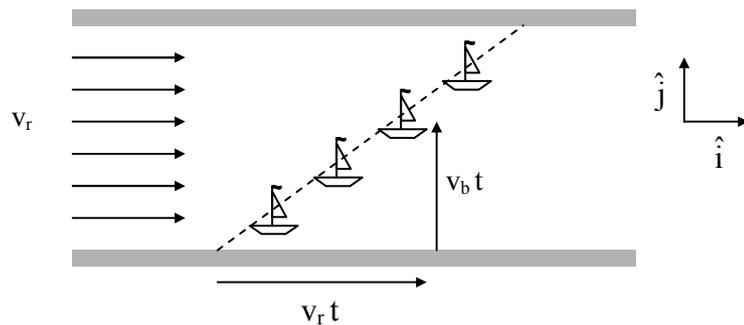


Fig. 3.3 - Movimento de um barco num rio com correnteza.

3.3 Movimento acelerado

Podemos generalizar o que vimos para o movimento unidimensional escrevendo:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

A integração de vetores pode ser executada componente a componente, como no caso da derivação. Portanto,

$$r_z = r_z^0 + \int_0^t v_z(t) dt$$

e assim por diante. No caso da aceleração ser constante temos:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad \text{e} \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

Podemos analisar este movimento através do sistema de equações:

Para a velocidade:

$$v_x = v_x^0 + a_x t$$

$$v_y = v_y^0 + a_y t$$

$$v_z = v_z^0 + a_z t$$

Para a posição:

$$r_x = r_x^0 + v_x^0 t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

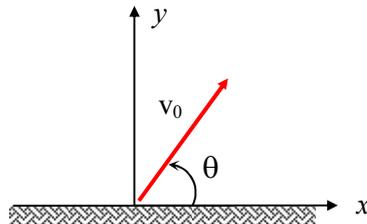
$$r_y = r_y^0 + v_y^0 t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$r_z = r_z^0 + v_z^0 t + \frac{1}{2} a_z t^2$$

Vamos em seguida ver alguns exemplos de movimento acelerado.

a) Lançamento de projétil

Um caso importante de movimento plano é aquele onde temos: $\vec{a} = -g \hat{j}$ (com $g = 9.8 \text{ m/s}^2$) que corresponde ao movimento de um corpo atirado de maneira arbitrária. Neste caso, o movimento será acelerado na direção y e não acelerado nas demais. Vamos imaginar a situação em que o corpo é lançado obliquamente de maneira a formar um ângulo θ com a superfície, como mostrado na Fig. 3.4



$$\begin{aligned} v_x^0 &= v_0 \cos \theta \\ v_y^0 &= v_0 \sin \theta \end{aligned}$$

Fig. 3.4 – Lançamento oblíquo de um projétil.

Tomando-se o eixo x paralelo à superfície e o eixo y na vertical, a velocidade inicial v_0 pode ser decomposta em $v_x^0 = v_0 \cos \theta$ e $v_y^0 = v_0 \sin \theta$. Na direção x não existe aceleração, porém na direção y temos $a_y = -g$ de modo que:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_x^0 = v_0 \cos \theta \\ x(t) = x_0 + v_x^0 t = x_0 + v_0 \cos \theta t \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_y(t) = v_y^0 - g t = v_0 \operatorname{sen} \theta - g t \\ y(t) = y_0 + v_y^0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Eliminando-se o tempo do primeiro conjunto de equações ($t = (x - x_0) / v_x^0$) e substituindo no segundo obtemos:

$$y = y_0 + v_y^0 \frac{(x - x_0)}{v_x^0} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_x^0} \right)^2$$

que representa uma trajetória parabólica como indicada na Fig. 3.5. A altura máxima pode ser calculada tomando-se $dy/dx = 0$. Assim,

$$\frac{v_y^0}{v_x^0} - g \frac{(x - x_0)}{v_x^0{}^2} = 0 \Rightarrow x_{\max} = x_0 + \frac{v_y^0 v_x^0}{g}$$

e substituindo em $y(t)$ tiramos:

$$y_{\max} = y_0 + \frac{1}{2} \frac{(v_y^0)^2}{g}$$

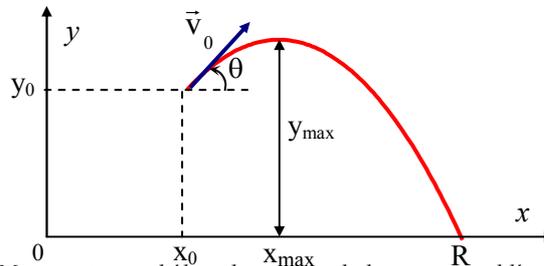


Fig. 3.5 - Movimento parabólico decorrente do lançamento oblíquo.

Vamos tomar $x_0 = y_0 = 0$ e calcular qual é o alcance do projétil ao longo do eixo x . Para isto fazemos $y = 0$ e assim obtemos:

$$0 = \frac{v_y^0}{v_x^0} R - \frac{1}{2} \frac{g R^2}{(v_x^0)^2}$$

Descartando a solução $R = 0$, que corresponde ao início do movimento, temos $R = 2v_y^0 v_x^0 / g$, e usando-se $v_y^0 = v_0 \sin \theta$ e $v_x^0 = v_0 \cos \theta$ obtemos:

$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

de onde concluímos que o ângulo que apresenta o maior alcance é $\theta = 45^\circ$

b) Movimento circular

Este deslocamento é caracterizado pelo fato de que o módulo do deslocamento permanece constante. Assim, imaginamos o raio vetor que descreve o movimento entre t e $t + \Delta t$. O ângulo $\Delta\theta$ varrido pelo raio vetor durante o intervalo de tempo Δt permite o cálculo da velocidade angular como ilustrado na Fig. 3.6.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

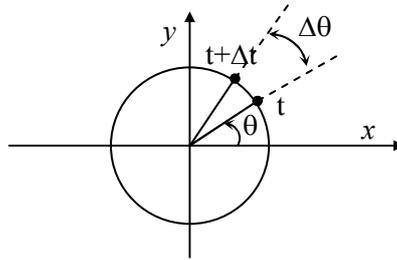


Fig. 3.6 – Movimento circular.

Quando ω é constante, temos $\theta = \int_0^t \omega dt = \omega t$ e assim podemos escrever: $x = r \cos \omega t$ e $y = r \sin \omega t$, ou em notação vetorial:

$$\vec{r} = r \cos \omega t \hat{i} + r \sin \omega t \hat{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -r\omega \sin \omega t \hat{i} + r\omega \cos \omega t \hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2 \cos \omega t \hat{i} - r\omega^2 \sin \omega t \hat{j} = -\omega^2 \vec{r}$$

que é sempre oposta a direção radial. Portanto, $a = |\vec{a}| = \omega^2 r = v^2 / r$ visto que $|\vec{v}| = r\omega$ e esta aceleração é conhecida como “centrípeta” por estar dirigida ao ponto central do movimento e é uma característica importante do movimento circular uniforme.

c) Movimento cicloide

É o movimento de um ponto da borda de um disco rodando, conforme mostra a Fig. 3.7. Considerando um sistema de eixos no qual x é paralelo ao chão, temos a combinação de um movimento translacional uniforme com um movimento circular uniforme. Para o movimento translacional, $x_t = x_0 + v_x t$ e, para o movimento circular, $x_0 = r \cos \omega t$ e $y_0 = r \sin \omega t$.

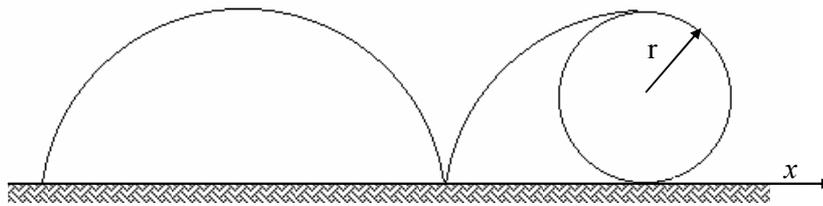


Fig. 3.7 - Movimento cicloide.

Desta forma,

$$x = x_0 + v_x t + r \cos \omega t$$

$$y = y_0 + r \sin \omega t$$

Ao utilizarmos a notação vetorial e fazendo $x_0 = y_0 = 0$,

$$\vec{r} = (v_x t + r \cos \omega t) \hat{i} + r \sin \omega t \hat{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (v_x - r\omega \sin\omega t) \hat{i} + r\omega \cos\omega t \hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2 \cos\omega t \hat{i} - r\omega^2 \sin\omega t \hat{j} = -\omega^2 \vec{r}_c$$

Exemplo: Considere um disco descendo um plano inclinado, formando um ângulo θ com a horizontal, como mostrado na Fig. 3.8. Vamos determinar $x(t)$ e $y(t)$ de um ponto localizado na borda do disco. Escolhendo o eixo x da maneira indicada na figura, temos $a_x = g \sin\theta$ e $a_y = 0$. Então, $x = x_t + x_c$, $y = y_t + y_c \Rightarrow x = v_x^0 t + \frac{1}{2} g \sin\theta t^2 + r \cos\beta$ e $y = v_y^0 t + r \sin\beta$, onde $\beta \neq \omega t$ (movimento acelerado) é o ângulo que o disco rodou.

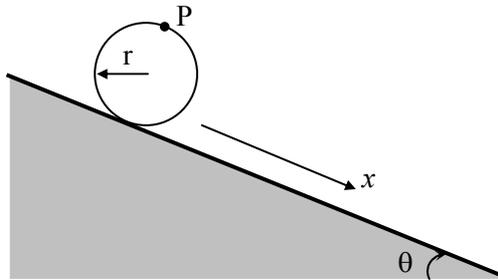


Fig. 3.8 – Disco descendo um plano inclinado

3.4 Movimentos planos descritos por coordenadas polares

Vamos considerar um movimento circular no qual o corpo percorre um comprimento de arco s , que está associado a um ângulo θ de acordo com: $s = r\theta$, sendo r o raio da trajetória. A velocidade tangencial é:

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

Para representar \vec{v} , vamos introduzir os versores \hat{r} e $\hat{\theta}$, que são adequados para se trabalhar com coordenadas polares. O versor \hat{r} tem a mesma direção e sentido do vetor posição \vec{r} . O versor $\hat{\theta}$ é perpendicular a \vec{r} e tangente ao círculo, apontando para a direção em que θ e s crescem como indica a Fig. 3.9. Desta forma, podemos escrever \vec{r} e \vec{v} em coordenadas polares da seguinte maneira:

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

$$\vec{v} = v \hat{\theta} = r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}$$

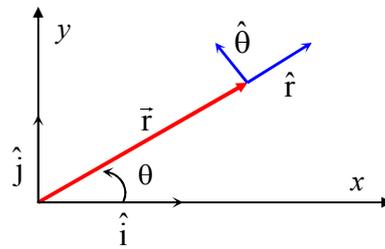


Fig. 3.9 – Movimento plano descrito por coordenadas polares.

Devemos notar que \hat{r} e $\hat{\theta}$ são versores que variam com o tempo. Para encontrar esta variação em termos dos versores \hat{i} e \hat{j} que são fixos vemos que $\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$ e $\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$. Desta forma,

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \sin \theta \hat{i} + \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \hat{j} = \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) = \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = -\frac{d\theta}{dt} \hat{r}$$

Uma vez que conhecemos a maneira pela qual \hat{r} e $\hat{\theta}$ variam com o tempo, podemos encontrar \vec{v} e \vec{a} a partir de \vec{r} .

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r \hat{r} \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = r \frac{d\hat{r}}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \hat{r}\end{aligned}$$

onde foi suposto que $\omega = d\theta/dt$ é constante. Como $d\theta/dt = v/r$, temos $\vec{a} = -(v^2/r) \hat{r} = -\omega^2 r \hat{r}$, que é a aceleração centrípeta no movimento circular uniforme.

Se o movimento for uniformemente acelerado, isto é, se $d\omega/dt = \alpha =$ constante, a expressão para a aceleração se modifica. Tomando a derivada de $\vec{v} = \omega r \hat{\theta}$ temos:

$$\vec{a} = r \left(\frac{d\omega}{dt} \hat{\theta} + \omega \frac{d\hat{\theta}}{dt} \right) = r \alpha \hat{\theta} - \omega^2 r \hat{r}$$

de onde vemos que além da aceleração centrípeta surge uma aceleração tangencial dada por $r \alpha \hat{\theta}$.

A descrição de um movimento retilíneo através de coordenadas polares é feita baseando-se na Fig. 3.10. Podemos relacionar v_r e v_θ da seguinte forma:

$$v_x = v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta$$

$$v_y = v_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta$$

ou

$$v_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta$$

$$v_\theta = -v_x \sin\theta + v_y \cos\theta$$

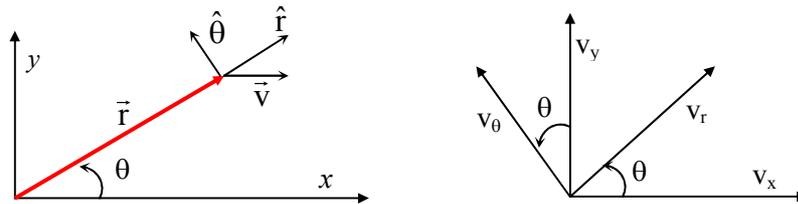


Fig. 3.10 – Descrição de um movimento retilíneo através de coordenadas polares.

Para o caso que estamos tratando, $v_x = v$ e $v_y = 0$. Portanto, $v_r = v \cos\theta$ e $v_\theta = v \sin\theta$, ou seja:

$$\vec{v} = v \cos\theta \hat{r} - v \sin\theta \hat{\theta}$$

Exercícios

- 1 – Considere um cilindro de raio R rolando sem deslizar num plano horizontal. O centro de massa do cilindro possui aceleração a . Qual é a aceleração angular do cilindro? Qual é o ângulo β que o cilindro roda como função do tempo?
- 2 – Dois corpos A e B estão em movimentos circular uniformes de trajetórias concêntricas com raios r_a e r_b e velocidades angulares ω_a e ω_b . Determine a velocidade relativa entre os dois corpos.
- 3 – Determinar a aceleração de um corpo que desliza pela rosca de um parafuso com passo h e raio R . Despreze o atrito e considere que o corpo partiu do repouso.
- 4 – É necessário lançar da terra uma bola por cima de uma parede de altura H que se encontra a uma distância S (Fig. 3.11). Qual é a menor velocidade inicial com que a bola pode ser lançada?

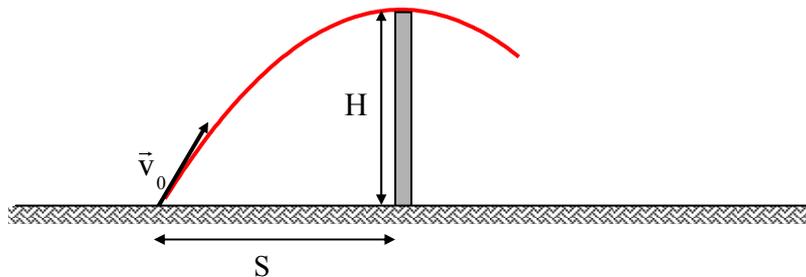


Fig. 3.11 – Lançamento de projétil sobre uma parede de altura H .

- 5 – Uma bala é disparada de um canhão com velocidade v_0 . Determine a região geométrica onde a bala certamente não cairá.
- 6 – Um plano inclinado forma um ângulo α com o plano xy , conforme mostra a Fig. 3.12. Um corpo é lançado com velocidade v_0 , formando um ângulo θ com o eixo y . Desprezando o atrito calcule: x_{\max} , z_{\max} e o tempo que o projétil demora para retornar ao eixo y .
- 7 – Uma pedra é lançada com velocidade inicial de 20 m/s. Sabendo-se que ela ficou 2 s no ar, calcule:
- o ângulo de lançamento (com a horizontal)
 - a altura máxima atingida
 - o alcance
 - outro ângulo de lançamento para o qual a pedra terá o mesmo alcance. (Neste caso o tempo será diferente de 2 s).

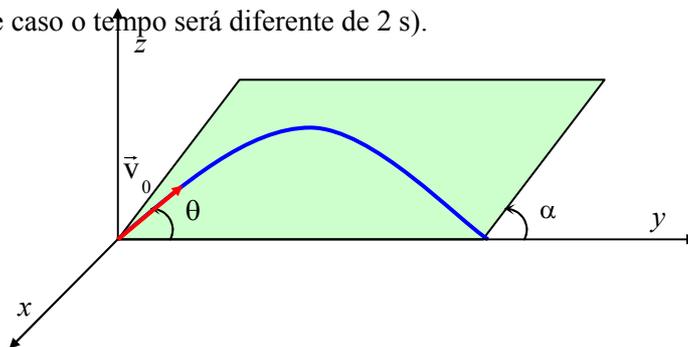


Fig. 3.12 – Lançamento oblíquo num plano inclinado.

- 8 – Um corpo translada com velocidade $v = 5$ m/s sobre um plano horizontal sem atrito. Subitamente ele encontra pela frente um plano inclinado (também sem atrito) de ângulo $\theta = 30^\circ$ e altura $H = 0,8$ m, conforme mostra a Fig. 3.13. Tomando-se $g = 10$ m/s, pergunta-se:
- a que distância d do final do plano inclinado o corpo cairá?
 - qual é a altura máxima que o corpo atingirá?

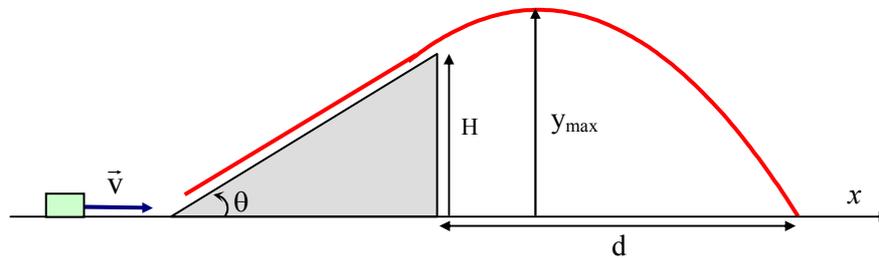


Fig. 3.13 - Lançamento oblíquo de um corpo por meio de uma rampa.

- 9 – Um pequeno corpo é lançado da origem com velocidade $v_0 = 100/\sqrt{3}$ m/s formando um ângulo $\theta = 60^\circ$ com a horizontal. Outro corpo é lançado 1 segundo depois, com a mesma velocidade v_0 , porém na horizontal e de uma altura H , como mostra a Fig. 3.14. Suponha que haja uma colisão entre os dois corpos e que $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- Em que instante de tempo ocorre a colisão?
 - Qual deve ser o valor de H para que a colisão ocorra?
 - Quais as coordenadas x e y da colisão?
- 3.10 – Um pequeno corpo é lançado da origem com velocidade v_0 segundo um ângulo θ com a horizontal. Outro corpo é lançado com a mesma velocidade v_0 , porém na horizontal e de uma altura H , como mostra a Fig. 3.14. Qual deve ser o valor de H tal que eles atinjam o mesmo ponto no eixo Ox ?

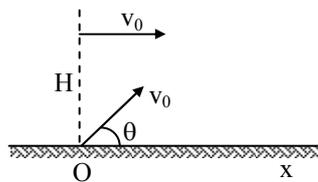


Fig. 3.14 - Lançamento de dois corpos.

3.11 - Mostre que o movimento de um projétil lançado com v_0 e θ é descrito

pela parábola: $y(x) = \frac{v_{0y}^2}{2g} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_{0x}} - \frac{v_{0y}}{g} \right)^2$, com $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ e $v_{0y} = v_0$

$\sin\theta$. b) Encontre o ângulo α que a trajetória faz com a horizontal para qualquer x ($\tan\alpha = dy/dx$), c) Encontre x_{\max} correspondente ao topo da trajetória ($\tan\alpha = 0$). d) Encontre o alcance R , fazendo $\alpha = \pi - \theta$

AS LEIS DE NEWTON 4

4.1 Introdução

Até o momento estudamos vários tipos de movimento sem no entanto nos preocuparmos com suas causas. Já sabíamos intuitivamente que para se modificar o movimento de um corpo é necessária a ação de um agente externo. De fato, na ausência completa de ação externa, o corpo permanece num estado de movimento constante. A maneira pela qual o agente externo age sobre o corpo é através da atuação de uma força. Portanto, a força nada mais é do que a quantificação da ação de um corpo sobre outro.

A força pode ser definida como uma grandeza física capaz de alterar o estado de movimento de um corpo ou a forma deste corpo. O estado de movimento de um corpo é caracterizado pelo seu *momentum_linear*, que é definido como:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

de forma que a existência de uma força produz alterações em \vec{p} .

O comportamento de um corpo quando sujeito a forças externas é regido pelas leis de Newton, expressas como:

Lei I - “*Todo corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, a menos que seja obrigado a modificar seu estado de movimento pela ação de forças externas*”.

Lei II - “*A modificação do movimento é proporcional à força atuante, ou seja, $\vec{F} = d\vec{p} / dt$* ”.

Lei III - “*A toda ação corresponde uma reação igual e oposta ou, as ações mútuas de dois corpos são sempre dirigidas em sentidos opostos*”.

A primeira lei estabelece justamente o que havíamos dito anteriormente, isto é, para modificarmos \vec{p} (grandeza que quantifica o estado de movimento do corpo) é necessário um agente externo exercendo uma força sobre o corpo. Suponha por exemplo, um cometa movendo-se em movimento retilíneo uniforme. Ele continuará neste estado até chegar nas proximidades de um planeta, que através da força gravitacional, modificará seu estado de movimento fazendo com que o *momentum* \vec{p} mude em módulo e direção. Esta idéia que acabamos de apresentar, embora bastante lógica, não o era na época de Galileu, pois se acreditava que para manter um corpo em movimento retilíneo uniforme era necessária a ação de agentes externos. O único estado natural e espontâneo para um corpo era o repouso!

A força também é necessária para alterar a forma de um corpo. Durante a deformação as partículas deste corpo são aceleradas até atingirem uma nova situação de equilíbrio. O equilíbrio de um corpo pode ser de tipos diferentes. Inicialmente, um corpo só estará em equilíbrio quando a resultante das forças agindo sobre ele for nula. O equilíbrio é dito *estável* quando uma pequena perturbação tira o sistema de equilíbrio, mas a vizinhança do corpo age de forma a restaurar o equilíbrio. O equilíbrio é dito *instável* quando uma pequena perturbação tira o sistema do equilíbrio e a vizinhança age no sentido de amplificar este efeito.

Vamos considerar que a quantidade de matéria num determinado corpo não se modifica. Neste caso, a ação de uma ou mais forças leva a uma aceleração:

$$\sum \vec{F} = m d\vec{v} / dt = m \vec{a}$$

e a constante de proporcionalidade entre força e aceleração é denominada *massa* do corpo. A unidade de massa é Kg (SI) ou g (CGS) enquanto que a da aceleração é m/s^2 (MKSÁ) ou cm/s^2 (CGS). Portanto, a unidade de força é definida como: $[F] = 1 \text{ N} = 1 \text{ Kg.m/s}^2$ no Sistema Internacional (SI) ou $[F] = 1 \text{ dyn} = 1 \text{ g.cm/s}^2$ no sistema CGS, sendo portanto, $1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$.

Quando a massa de um corpo varia, como por exemplo, durante a exaustão de combustível num foguete, a forma mais geral da segunda lei de Newton fica:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

A expressão $\vec{p} = m\vec{v}$ para o *momentum* de um corpo é válida quando este tem velocidade bem menor que a velocidade da luz, c , que é de aproximadamente 300.000 km/s. Para velocidades altas ($v \approx c$),

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \vec{v} = m(v) \vec{v}$$

onde m_0 é chamado de *massa de repouso* e $m(v)$ varia de uma maneira que o corpo torna-se cada vez mais pesado quanto mais se aumenta sua velocidade. Porém, se $v/c \ll 1$, a aproximação $m \approx m_0$ é bastante boa.

Quando um corpo encontra-se próximo à superfície da Terra, esta exerce sobre ele uma força que é denominada *peso*, dada por: $w = mg$ e que está dirigida para o centro da Terra.

A massa de um corpo, como vimos, é quantificada através da razão entre a força e a aceleração. Associado à massa, há uma propriedade importante que é denominada *inércia*. Imagine uma locomotiva e um carrinho de bebê sobre o chão sem atrito, completamente livres para se moverem. Ao exercermos uma ação sobre cada um deles (por exemplo, um empurrão), o carrinho começa a andar enquanto que o trem oferecerá forte resistência à mudança de movimento por possuir uma inércia maior. Corpos com maiores massas apresentam maior inércia e, conseqüentemente, maior resistência a mudanças no seu estado de movimento.

Todos os corpos apresentam a tendência de permanecer no seu estado original de movimento quando acionados subitamente por um agente externo. Uma ilustração deste fato é o que ocorre com os passageiros no interior de um automóvel em movimento retilíneo uniforme que é freado ou faz uma curva acentuada. No primeiro caso, a tendência do passageiro é chocar-se contra o

pára-brisa enquanto que no segundo, a tendência é sair pela tangente à curva. Este tipo de comportamento está relacionado com a inércia do passageiro.

Das três leis de Newton, a 3^a é aquela que sem dúvida exige um maior esclarecimento. Ela descreve uma propriedade importante das forças: sua ocorrência em pares, isto é, toda ação corresponde uma reação de mesma intensidade, porém de sentido oposto. Um fato importante a ser observado é que ação e reação não se cancelam (ou se equilibram) porque agem em corpos diferentes. Um exemplo disto é o de um corpo sobre uma mesa como ilustrado na Fig. 4.1. O corpo exerce uma força \vec{N}' sobre a mesa e esta “responde” exercendo sobre o corpo uma força $\vec{N} = -\vec{N}'$. \vec{N} e \vec{N}' constituem um par ação-reação. A Terra exerce sobre o corpo a força peso \vec{w} para a qual existe uma reação \vec{w}' exercida do corpo sobre a Terra. \vec{w} e \vec{w}' constituem outro par ação-reação porém \vec{w} e \vec{N} não constituem par ação-reação. Devido ao fato do corpo estar em equilíbrio, pela 2^a Lei de Newton, $\vec{a} = 0$ e portanto $\sum \vec{F} = \vec{0}$. Logo:

$$\vec{w} + \vec{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{w} = -\vec{N}$$

Quando dois corpos isolados constituem um sistema, as únicas forças existentes são as que constituem o par ação-reação. Neste caso, olhando para o sistema como um todo, vemos que:

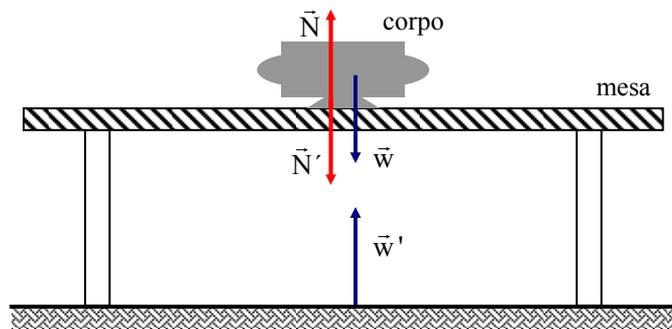


Fig. 4.1 - Forças agindo num corpo sobre uma mesa.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

e assim concluímos que o *momentum* total se conserva na ausência de forças externas já que \vec{F}_1 e \vec{F}_2 constituem forças externas ao sistema. Esta lei de conservação do *momentum* é de grande importância no estudo de colisões entre corpos, onde as forças envolvidas são internas ao sistema.

4.2 Referenciais

As grandezas cinemáticas só têm sentido físico quando medidas com relação a um ponto de referência. Assim, se considerarmos por exemplo, um trem movendo-se com velocidade v_0 na direção $x > 0$ e um homem dentro do trem movendo-se com velocidade $-v_0$ (na direção $x < 0$), observamos que para uma pessoa parada fora do trem, a velocidade do homem será nula. Com este exemplo vemos claramente que o conceito de movimento está intrinsecamente ligado ao de referencial.

Consideremos um sistema de coordenadas $O(x, y, z)$ fixo no espaço, no qual a posição de um corpo é especificada pelo vetor posição:

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

a partir do qual podemos encontrar a velocidade e a aceleração da maneira tradicional:

$$\vec{v} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} + \dot{z} \hat{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} + \ddot{z} \hat{k}$$

Consideremos a seguir um segundo sistema de coordenadas $O'(x', y', z')$ movendo-se com velocidade $\vec{v}_0' = v'_{ox} \hat{i} + v'_{oy} \hat{j} + v'_{oz} \hat{k}$ com relação ao referencial fixo, conforme mostra a Fig. 4.2. O vetor \vec{R} descreve a posição do ponto O' com relação ao ponto O . Se este referencial estiver uniformemente acelerado, $\vec{R}(t)$ será dado por:

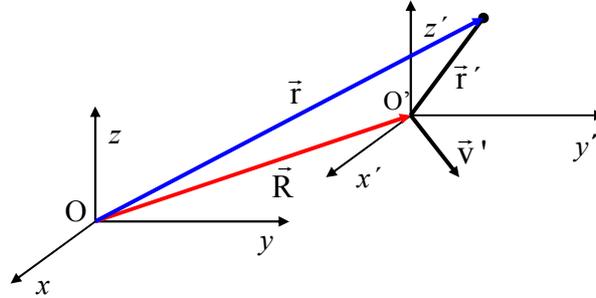


Fig. 4.2 - Referenciais em movimento relativo.

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{v}'_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}_R t^2$$

Por outro lado, olhando para a figura vemos que a adição geométrica dos vetores nos fornece: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$ ou $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$, onde \vec{r}' descreve a posição do corpo visto por um observador solidário ao referencial móvel. Este observador verá a velocidade do corpo dada por:

$$\vec{v}' = \dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}} = \vec{v} - \vec{v}'_0 - \vec{a}_R t$$

que é a velocidade que o corpo possui no sistema de coordenadas O menos a velocidade de O' com relação a O. A aceleração por sua vez é:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_R$$

que é a aceleração no sistema fixo menos a aceleração relativa entre os dois referenciais. No caso particular em que o sistema móvel O' não está acelerado ($\vec{a}_R = \vec{0}$) temos $\vec{a}' = \vec{a}$, isto é, a aceleração é a mesma nos dois referenciais. Referenciais deste tipo, onde a lei de Newton tem a mesma forma ($\vec{F} = m\vec{a}' = m\vec{a}$) são chamados de referenciais inerciais.

4.3 Aplicações das leis de Newton

Como vimos, as leis de Newton são as leis básicas da Mecânica Clássica. Em princípio, qualquer problema de dinâmica pode ser resolvido

através de sua aplicação. Passaremos agora a analisar uma série de exemplos que ilustram tais leis.

De modo geral, os problemas envolvendo forças podem ser classificados em duas categorias. Na primeira, conhecemos as forças que agem sobre o corpo e queremos encontrar seu efeito, expresso através de mudanças na velocidade e posição. Na segunda categoria, conhecemos o movimento do corpo e a partir disto queremos determinar o conjunto de forças agindo sobre ele. A solução de um problema pode ser encontrada através de uma sequência natural de análises. Primeiramente, o problema deve estar claramente colocado e se ele apresentar várias partes, cada uma delas deve ser analisada antes de se considerar o sistema como um todo. Sempre que houver contato entre corpos, lembre-se que ação e reação agem em corpos diferentes.

a) Plano inclinado sem atrito

Queremos encontrar o movimento de um corpo colocado sobre um plano com ângulo de inclinação θ como mostrado na Fig. 4.3. As forças agindo sobre ele são: o peso \vec{w} , que é dirigido para baixo e a força de reação \vec{N} , que é normal à superfície.

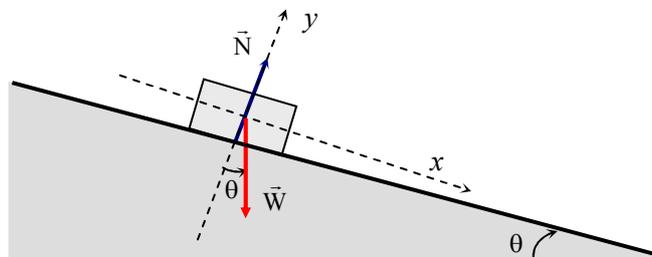


Fig. 4.3 - Plano inclinado sem atrito.

Como o corpo não pode penetrar no plano inclinado, concluímos que o movimento só deve ocorrer na direção paralela a ele. Isto implica em que a força resultante na direção perpendicular ao plano é nula e assim:

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = Ma_x$$

de onde obtemos:

$$-Mg \cos \theta + N = 0 \Rightarrow N = Mg \cos \theta$$

$$Mg \sin \theta = Ma_x \Rightarrow a_x = g \sin \theta$$

e como a_x é constante, o movimento paralelo ao plano é do tipo uniformemente acelerado já visto anteriormente.

b) Corpo suspenso por cordas

Imagine um corpo suspenso por duas cordas conforme mostra a Fig. 4.4. As cordas ficarão sujeitas às tensões \vec{T}_1 e \vec{T}_2 dirigidas ao longo de seu comprimento e, portanto, agindo sobre o corpo. Como este está em equilíbrio, a soma total das forças agindo sobre ele é nula, de forma que:

$$\sum F_x = \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$T_1 \cos \theta_1 - T_2 \cos \theta_2 = 0$$

$$T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 - Mg = 0$$

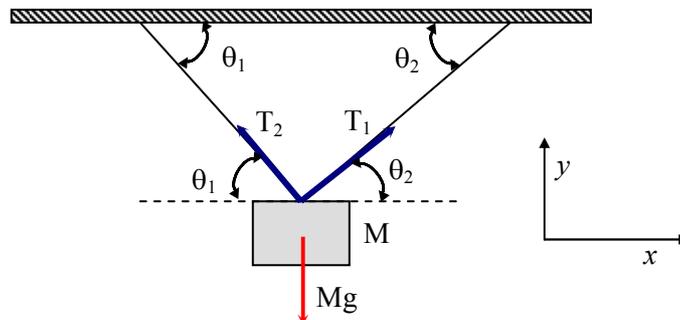


Fig. 4.4 - *Corpo suspenso por cordas.*

Destas duas equações tiramos \vec{T}_1 e \vec{T}_2 :

$$T_1 = \frac{Mg \cos \theta_1}{\cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2} = \frac{Mg \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$T_{21} = \frac{Mg \cos \theta_2}{\cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2} = \frac{Mg \cos \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

No caso da corda resistir somente a uma tensão máxima T_{\max} , podemos analisar se T_1 ou T_2 ultrapassa tal limite.

Em dinâmica, os problemas envolvendo cordas e fios são bastante freqüentes e, portanto, vamos tecer algumas considerações a este respeito. Vamos considerar uma corda de massa M_c e comprimento L que sustenta um corpo de massa M ao longo da vertical (ver Fig.4.5). Queremos calcular a tensão na corda em toda a extensão de seu comprimento.

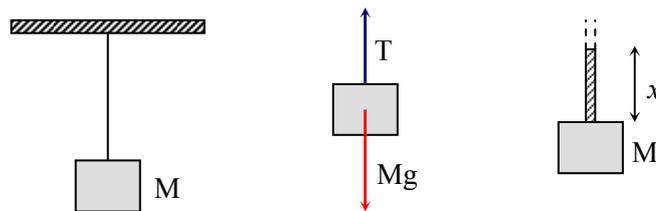


Fig. 4.5 - Corpo suspenso por uma corda com massa.

Se isolarmos o ponto de contato entre o corpo e a corda temos $T = Mg$. Por outro lado, se tomarmos um ponto a uma altura x sobre o corpo, a massa total abaixo dele é $M + (M_c/L)x$ e para que a corda esteja em equilíbrio, a tensão deverá ser:

$$T(x) = Mg + \frac{M_c}{L} g x$$

Isto mostra que à medida que subimos pela corda seu nível de tensão aumenta e no ponto de contato com o teto $T = (M + M_c) g$, como esperado. No entanto, se a massa da corda for desprezível, a tensão é a mesma em cada ponto ao longo de seu comprimento e ela funciona apenas como transmissora de esforços.

c) Dois corpos ligados por uma corda

Considere dois corpos com massas M_1 e M_2 ligados por uma corda sem massa e podendo deslizar sobre uma mesa sem atrito. Existe ainda uma força \vec{F} agindo sobre M_2 , como indicado na Fig. 4.6. Queremos encontrar a tensão na corda e a aceleração do sistema. Como a corda tem massa desprezível, ela simplesmente transmite a força. Isolando os corpos, temos:

$$T = M_1 a_1$$

$$F - T = M_2 a_2$$

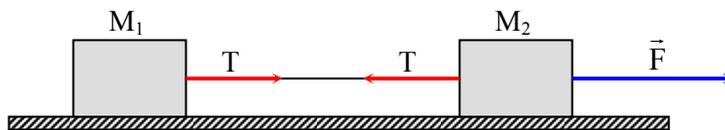


Fig. 4.6 - Corpos ligados por uma corda.

O sistema está vinculado de forma tal que os corpos são obrigados a andar juntos e assim $a_1 = a_2 = a$. Logo:

$$F - M_1 a = M_2 a \Rightarrow a = \frac{F}{M_1 + M_2}$$

$$T = M_1 a = \frac{M_1 F}{M_1 + M_2}$$

d) Corpos em contato

Uma força \vec{F} é aplicada sobre um corpo de massa M_1 que está em contato com outro corpo de massa M_2 , como mostra a Fig. 4.7. Ambos estão colocados sobre uma mesa sem atrito e a questão que se pretende responder é sobre a força que é transmitida ao corpo 2. Como os corpos se movem juntos, a aceleração será a mesma para os dois e então podemos escrever:

$$F = (M_1 + M_2) a \Rightarrow a = \frac{F}{M_1 + M_2}$$

Voltamos agora a analisar o corpo 2. Chamando T a força que 1 faz sobre 2, temos:

$$T = M_2 a = \frac{M_2 F}{M_1 + M_2}$$

e assim vemos que este resultado é similar ao do caso em que os dois corpos estão ligados pela corda.

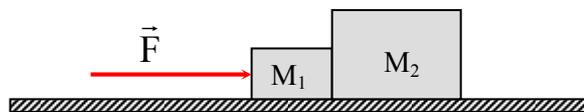


Fig. 4.7 - Corpos em contato.

e) n corpos conectados por cordas

Temos n corpos conectados por cordas conforme mostra a Fig. 4.8 e queremos calcular a tensão na corda que conecta um par qualquer destes corpos. Como os corpos possuem mesma massa M e se deslocam juntos quando submetidos à ação da força F , podemos escrever que a aceleração do sistema é a força dividida pela massa total, isto é, $a = F/(nM)$. A força T_i por sua vez movimentada todos os corpos a sua esquerda, desde i até n . O número destes corpos é $n - i + 1$ e portanto:

$$T_i = (n - i + 1)Ma = (n - i + 1) \left(\frac{MF}{nM} \right) = \frac{(n - i + 1)}{n} F$$



Fig. 4.8 - Corpos conectados por cordas.

f) Sistema com polias: máquina de Atwood

Vamos considerar inicialmente uma corda ao redor de uma polia sem atrito e sem massa como indica a Fig. 4.9(a). Como a corda possui massa desprezível, ela simplesmente transmite a tensão e portanto, $F_1 = F_2 = F$.

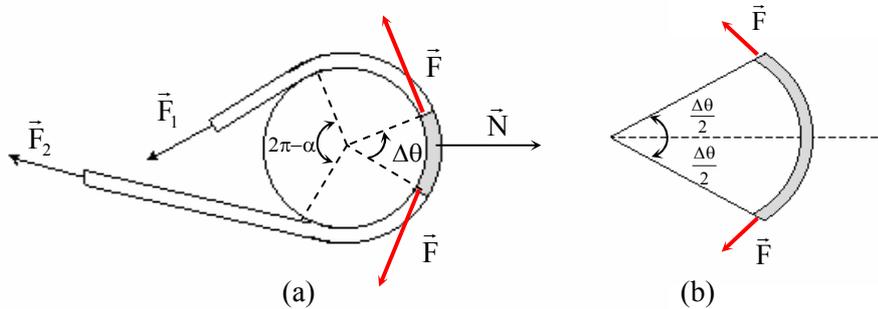


Fig. 4.9 - Corda ao redor de uma polia (a) e pequena porção da corda (b).

Desta forma, é como se a polia simplesmente mudasse a direção da força. Podemos calcular a força normal à polia da seguinte maneira. Tomemos uma pequena porção de corda definida pelo ângulo $\Delta\theta$, como mostra a Fig. 4.9(b). Projetando as forças F na direção radial temos:

$$dN = 2F \sin(\Delta\theta/2) \cong F \Delta\theta$$

enquanto que a componente tangencial se anula. Para encontrarmos a força normal total (somada em módulo) devemos integrar no ângulo:

$$N = \int_0^\alpha F d\theta = \alpha F \quad (\text{em módulo})$$

A máquina de Atwood é um dos exemplos mais simples envolvendo polias, onde duas massas, M_1 e M_2 são interligadas através de uma corda sem massa, como mostrado na Fig. 4.10. Chamando a tensão na corda de T , temos:

$$\begin{aligned} T - M_1 g &= M_2 a \\ -T + M_2 g &= M_2 a \end{aligned}$$

de onde tiramos

$$a = \frac{(M_2 - M_1)}{(M_2 + M_1)} g$$

A tensão T é dada por:

$$T = M_1 g + M_1 a = M_1 g + M_1 \frac{(M_2 - M_1)}{(M_2 + M_1)} g$$

e a força exercida sobre o suporte da polia é:

$$2T = \frac{4M_1 + M_2g}{(M_1 + M_2)}$$

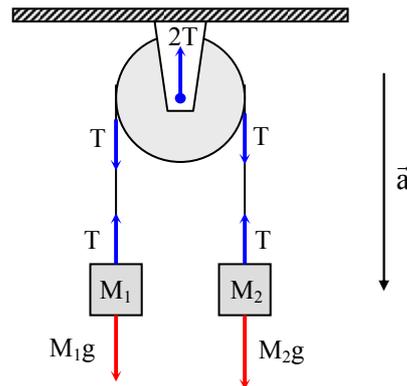


Fig. 4.10 - Máquina de Atwood.

g) Bloco sobre a mesa puxado por corpo na vertical

A Fig. 4.11 mostra um bloco de massa M_1 sobre uma mesa sem atrito, puxado por outro bloco de massa M_2 sob a ação da gravidade. Isolando o bloco 1 temos:

$$T = M_1 a$$

enquanto que ao isolar o bloco 2 obtemos:

$$M_2 g - T = M_2 a$$

Combinando estas duas equações obtemos a aceleração do sistema como:

$$a = \frac{M_2 g}{M_1 + M_2}$$

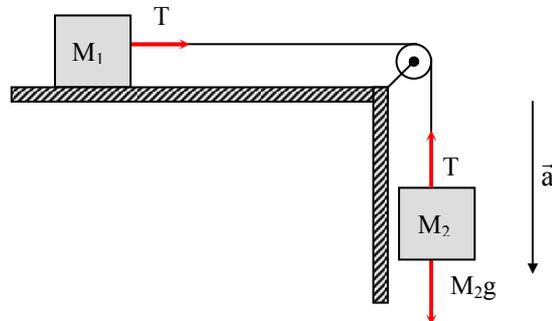


Fig. 4.11 - Bloco sobre a mesa e corpo na vertical.

h) Peso aparente de um objeto num elevador acelerado

Vamos imaginar um objeto no interior de um elevador acelerado como indica a Fig. 4.12. Qual seria seu peso aparente se ele estivesse sendo medido por uma balança? O objeto pressiona a balança com uma força N , que é o próprio peso aparente medido por ela. Pela 3ª lei de Newton, a balança produz uma força N , só que dirigida para cima. O objeto anda junto com o elevador de forma que a 2ª lei de Newton fica:

$$N - Mg = Ma \Rightarrow N = M(g + a)$$

Se o elevador estiver acelerado para cima, o peso aparente é maior que Mg , enquanto que se a aceleração for para baixo, o peso aparente será menor que Mg .

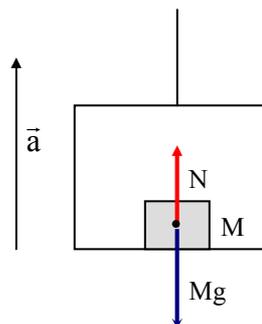


Fig. 4.12 - Objeto num elevador acelerado.

4.4 Movimento circular

Como vimos anteriormente, quando um corpo encontra-se em movimento circular, existe uma aceleração radial, denominada centrípeta, que é dada por $a_c = v^2/r$, onde r é o raio do movimento circular e v é a velocidade tangencial. É claro que a velocidade tangencial pode variar e, portanto, existir uma aceleração tangencial. Vamos a seguir estudar vários casos deste tipo de movimento.

a) Pêndulo cônico

Considere um pêndulo de comprimento L , formando um ângulo θ com a vertical e descrevendo um círculo de raio R no plano horizontal, como indica a Fig. 4.13. Qual é a velocidade tangencial da massa M ? Para responder esta pergunta, vamos analisar as forças agindo sobre ela.

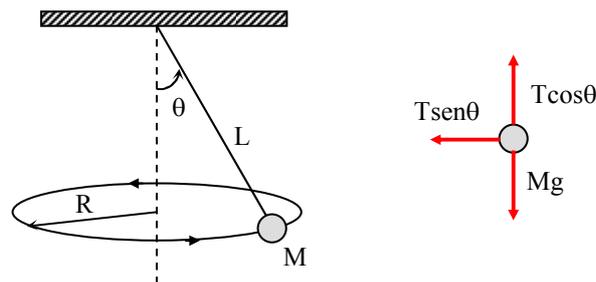


Fig. 4.13 - Pêndulo cônico.

Na direção radial temos $T \sin\theta = Mv^2/R$, enquanto que na direção vertical, $T \cos\theta = Mg$. Dividindo uma equação pela outra obtemos:

$$\operatorname{tg}\theta = v^2/Rg$$

ou então:

$$v^2 = Rg \frac{R}{\sqrt{L^2 - R^2}} = \frac{R^2 g}{\sqrt{L^2 - R^2}}$$

Suponha que o fio se rompa com uma tensão T_0 . Para que velocidade isto ocorrerá?

b) Movimento circular vertical

Considere um corpo de massa M preso a uma corda de comprimento R sem massa, posto para rodar em movimento circular no plano vertical, como mostrado na Fig. 4.14. A posição do corpo é especificada pelo ângulo θ e tal que no ponto máximo (1) $\theta = 0$ e no ponto mínimo (2) $\theta = \pi$. Inicialmente estamos interessados em determinar a tensão na corda quando o corpo se movimenta com velocidade constante. Na direção radial temos:

$$T + Mg \cos\theta = Mv^2/R \Rightarrow T = \frac{Mv^2}{R} - Mg \cos\theta$$

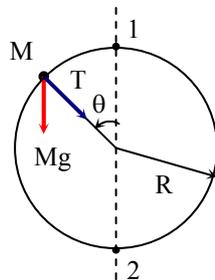


Fig. 4.14 - Movimento circular vertical.

Deste resultado vemos que $T = Mv^2/R - Mg$ é a tensão mínima para $\theta = 0^\circ$ e $T = Mv^2/R + Mg$ é a tensão máxima para $\theta = \pi$. A Fig. 4.15 mostra um gráfico completo de T contra θ . A velocidade mínima capaz de manter o movimento circular ocorre quando $T = 0$ e vale $v_{\min} = \sqrt{gR}$. Para velocidades inferiores a esta, não é possível haver movimento circular na vertical.

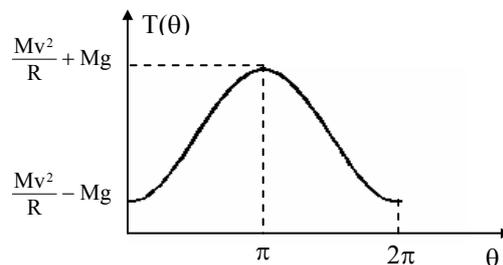


Fig. 4.15 - Tensão na corda em função do ângulo θ .

c) Pêndulo simples

O movimento pendular é um dos movimentos mais estudados em Mecânica Clássica, ao lado do movimento harmônico do sistema massa-mola. Considere o pêndulo da Fig. 4.16 deslocado de um certo ângulo θ . Usando a 2ª lei de Newton nas direções radial e tangencial temos respectivamente:

$$T - Mg \cos \theta = Mv^2/L$$

$$- Mg \sin \theta = Ma_t$$

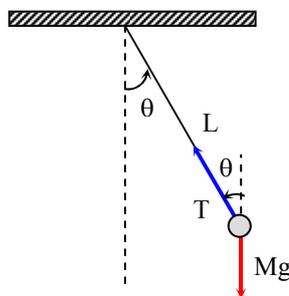


Fig. 4.16 - Pêndulo simples.

Vamos supor que a condição inicial do movimento seja $\theta = \theta_0$ e $v = 0$, de forma que $T_0 = Mg \cos \theta_0$. Como $a_t = dv/dt = (dv/d\theta)(d\theta/dt) = (dv/d\theta) v/L$ temos para a direção tangencial:

$$- Mg \sin \theta = M \frac{dv}{d\theta} \frac{v}{L}$$

$$\Rightarrow gL \sin \theta d\theta = -v dv$$

que pode ser integrado, resultando em:

$$gL \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta = - \int_0^v v dv = -\frac{1}{2} v^2$$

A realização desta integral é simples e leva a:

$$-gL(\cos \theta_0 - \cos \theta) = \frac{1}{2} v^2$$

Logo:

$$v^2/L = -2g(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

e assim, a tensão no fio varia com θ de acordo com:

$$T = Mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$$

d) Corda girante

Imagine uma corda de massa M e comprimento L colocada para girar num plano horizontal (sobre uma mesa sem atrito) com velocidade angular ω , conforme mostra a Fig. 4.17. Queremos encontrar a tensão na corda a uma distância r do ponto de fixação. Para isto vamos considerar um elemento de comprimento Δr , como mostrado na figura, cuja massa é $\Delta m = (M/L)\Delta r$. Este elemento está sujeito às tensões $T(r)$ e $T(r + \Delta r)$. Pela 2ª lei de Newton temos:

$$T(r) - T(r + \Delta r) = \Delta m \omega^2 r = \frac{M}{L} \omega^2 r \Delta r$$

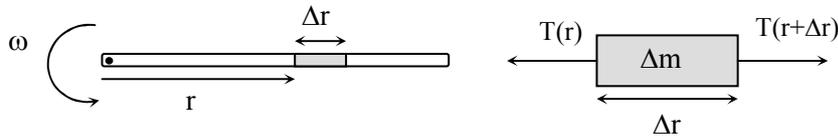


Fig. 4.17 - Corda girando sobre uma mesa sem atrito.

Podemos re-escrever esta expressão como:

$$\frac{T(r + \Delta r) - T(r)}{\Delta r} = -\frac{M\omega^2 r}{L}$$

No limite em que Δr tende a zero ficamos com:

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left[\frac{T(r + \Delta r) - T(r)}{\Delta r} \right] = \frac{dT}{dr} = -\frac{M\omega^2 r}{L}$$

A seguir, vamos integrar entre os pontos 0 e r :

$$\int_{T_0}^{T(r)} dT = -\frac{M\omega^2}{L} \int_0^r r dr \Rightarrow$$

$$T(r) - T_0 = -\frac{M\omega^2 r^2}{2L} \Rightarrow T(r) = T_0 - \frac{M\omega^2 r^2}{2L}$$

Para encontrar o valor de T_0 , notamos que $T = 0$ para $r = L$ (a corda acaba neste ponto). Logo,

$$0 = T_0 - \frac{M\omega^2 L}{2} \Rightarrow T_0 = \frac{M\omega^2 L}{2}$$

e conseqüentemente:

$$T(r) = \frac{M\omega^2}{2L}(L^2 - r^2)$$

A Fig. 4.18 mostra o gráfico de $T(r)$.

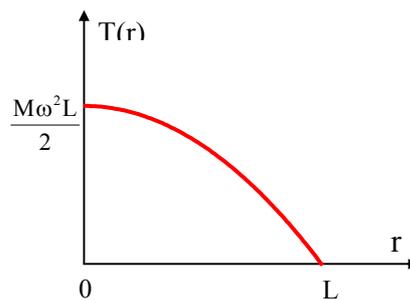


Fig. 4.18 – Tensão na corda como função da posição radial.

4.5 Força retardadora proporcional à velocidade

Quando um corpo move-se no interior de um fluido (gás ou líquido), age sobre ele uma força proporcional à velocidade, porém na direção oposta ao movimento. Esta força é denominada *viscosa*. Assim, vamos imaginar um corpo com velocidade inicial v_0 , movendo-se num meio viscoso. Pela 2ª lei de Newton temos:

$$ma = m \frac{dv}{dt} = -bv$$

Esta equação, chamada de equação diferencial, pode ser resolvida se isolarmos v e t e a seguir integrarmos:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} dt \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} \int_0^t dt$$

Logo:

$$\begin{aligned} \ln v - \ln v_0 &= \ln \left(\frac{v}{v_0} \right) = -\frac{bt}{m} \\ \Rightarrow v(t) &= v_0 \exp \left\{ -\frac{bt}{m} \right\} \end{aligned}$$

de modo que a velocidade do corpo decresce exponencialmente como mostra a Fig. 4.19.

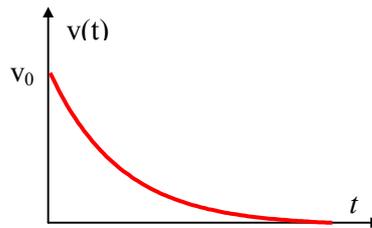


Fig. 4.19 - Velocidade de um corpo jogado com velocidade v_0 num meio viscoso.

Vamos imaginar agora um corpo num meio viscoso caindo sob a ação da gravidade. O balanço das forças leva à seguinte equação de movimento:

$$mg - bv = m \frac{dv}{dt}$$

A velocidade vai aumentando até que a força gravitacional é equilibrada pela força viscosa. A partir deste ponto teremos $dv/dt = 0$ e conseqüentemente não haverá mais mudanças de velocidade. Dizemos então que o corpo atingiu sua velocidade terminal v_T que é dada por:

$$mg = bv_T \Rightarrow v_T = \frac{mg}{b}$$

Para resolvermos a equação de movimento vamos supor que o corpo partiu do repouso. Isolando v e t temos:

$$\frac{dv}{g - \frac{bv}{m}} = dt \Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{g - \frac{bv}{m}} = \int_0^t dt$$

Fazendo a substituição: $g - \frac{bv}{m} = u \Rightarrow dv = -\frac{m}{b} du$

$$-\frac{m}{b} \int_g^{g-bv/m} \frac{du}{u} = \int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{g - bv/m}{g}\right) = -\frac{b}{m} t \Rightarrow \frac{g - bv/m}{g} = \exp\{-bt/m\}$$

A velocidade do corpo cresce como mostra a Fig. 4.20.

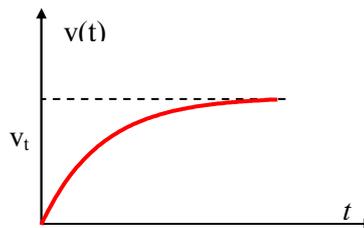


Fig. 4.20 - Velocidade de um corpo acelerado num meio viscoso.

4.6 Forças observadas na natureza

As forças existentes entre as partes de um sistema são oriundas de interações fundamentais tais como: forças gravitacionais, forças eletromagnéticas e forças nucleares (fortes e fracas). Estas forças, responsáveis pela existência da matéria, serão vistas em vários cursos futuros. Nós vamos aqui abordar apenas os efeitos macroscópicos destas forças.

a) Forças elásticas: lei de Hooke

Denominamos de *elásticos* aqueles corpos que ao sofrerem deformações quando sujeitos a esforços, têm a propriedade de recuperarem

sua forma original quando tais esforços são removidos. Vamos imaginar a seguinte experiência: consideremos uma mola com uma das extremidades fixa na parede e com uma força F aplicada na outra, como ilustra a Fig. 4.21.

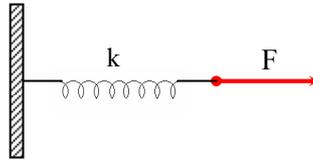


Fig. 4.21 - Mola tracionada.

Antes da aplicação da força F , a mola tem um comprimento livre x_0 . Após a aplicação desta, ela distende-se para um novo comprimento x , tal que a deformação é dada por $\Delta x = x - x_0$. Se formos aumentando gradativamente a força F e medindo a deformação Δx associada, verificaremos a existência de dois tipos de comportamento. Inicialmente, a força e a deformação são diretamente proporcionais, mas conforme F aumenta isto deixa de ser verdade. Num gráfico de F contra Δx , mostrado na Fig. 4.22, a região de linearidade vai do ponto 0 até o ponto 1. Neste regime, denominado de *elástico*, vale a relação:

$$F = k \Delta x$$

onde k (inclinação da reta) é chamada de constante de mola e a expressão acima, conhecida como *lei de Hooke*. Se olharmos microscopicamente para o material, neste regime os vários planos de átomos sofrem deslocamento relativo entre si, mas um determinado átomo permanece sempre ligado à sua posição original.

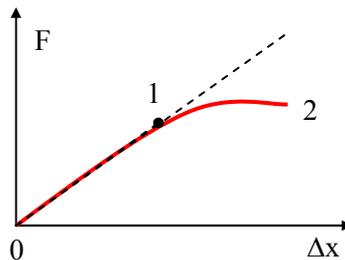


Fig. 4.22 - Deformação de uma mola real sujeita a uma força F .

O regime que vai de 1 a 2 é denominado *plástico* e a deformação causada nesta região é permanente. Microscopicamente, os planos atômicos pulam de uma posição para a seguinte, gerando deformações permanentes no material. Ao atingir o ponto 2, o material não resiste mais ao esforço e rompe-se.

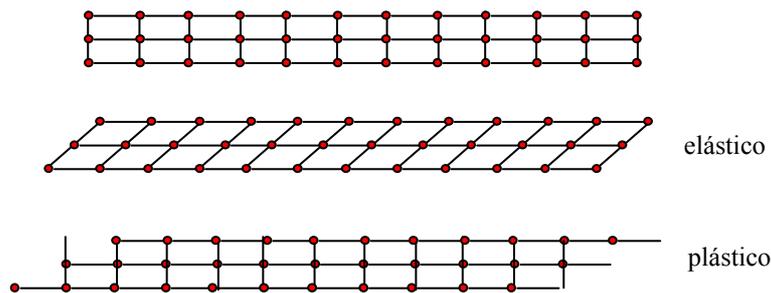


Fig. 4.23 - Descrição microscópica dos regimes elástico e plástico.

b) Forças de contato e atrito

Quando duas superfícies sólidas são colocadas em contato, existe uma resistência ao deslocamento relativo destas superfícies que é denominada de atrito. O atrito tem sua origem no fato de que as superfícies não são microscopicamente perfeitas, de maneira a se estabelecerem vários pontos de contato que dificultam o movimento relativo entre as superfícies, como mostra a Fig. 4.24.

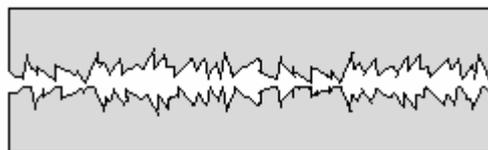


Fig. 4.24 - Superfícies reais em contato.

Devido a esta natureza da força de atrito, esperamos que quanto mais forte uma superfície for pressionada contra a outra, maior deve ser a resistência ao deslizamento, ou seja, maior é o atrito. Logo, a força de atrito é

proporcional à força normal entre as duas superfícies: $F_{\text{at}} \propto N$. Outro fator que influencia a intensidade da força de atrito é a qualidade da superfície: se esta for bem polida, o atrito será menor. Finalmente, o tipo de material usado na confecção de corpo também é importante na determinação de F_{at} : se o material for macio, a tendência é que ele se “amolde” à outra superfície e isto dificulta o deslizamento. A qualidade da superfície e a dureza do material especificam o coeficiente de atrito μ que definiremos a seguir.

Vamos imaginar um experimento onde uma força F variável é aplicada sobre um corpo de massa M , inicialmente em repouso sobre uma superfície áspera, como esquematizado na Fig. 4.25. Se F é relativamente pequena, o corpo continua em repouso e neste caso, $F = F_{\text{at}}$. Note que se $F = 0$, $F_{\text{at}} = 0$, indicando que a força de atrito só existe se houver tendência ao deslizamento. Se continuarmos a aumentar F , esta atinge um valor máximo para o qual o corpo se encontra iminência de deslizar. Neste ponto define-se o coeficiente de atrito estático como $F_{\text{max}} = \mu_e N$. A partir daí, o corpo entra em movimento e qualquer incremento em F contribui exclusivamente para acelerar o corpo, como mostra a Fig. 4.26. Na situação de movimento, a força de atrito é $F_{\text{at}} = \mu_d N$, onde μ_d é chamado de coeficiente de atrito dinâmico. Assim, no regime estático $F_{\text{at}} \leq \mu_e N$ e no regime dinâmico $F_{\text{at}} = \mu_d N$, sendo $\mu_d < \mu_e$ (verificado experimentalmente).



Fig. 4.25 - Corpo puxado sobre uma superfície com atrito.

Como exemplo do cálculo de força de atrito, tomemos um corpo de massa M sobre um plano inclinado, como mostra a Fig. 4.27. Da 2ª lei de Newton temos:

$$N - Mg \cos\theta = 0$$

e

$$Mg \sin\theta - F_{\text{at}} = Ma$$

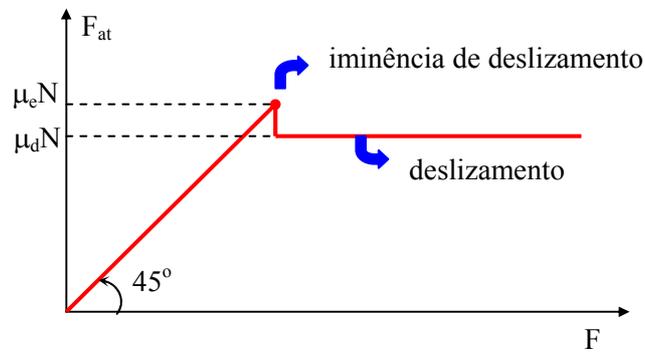


Fig. 4.26 - Variação da força de atrito com a força externa aplicada.

No caso do corpo estar na iminência de deslizamento, $a = 0$ e $F_{at} = \mu_e N$. Desta forma, $\mu_e = \tan\theta$.

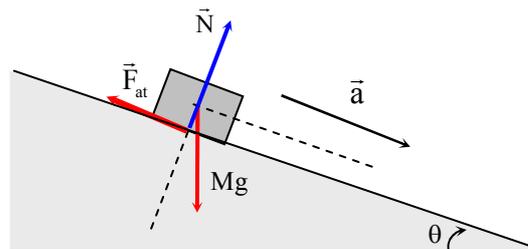


Fig. 4.27 - Corpo sobre um plano inclinado com atrito.

Como segundo exemplo, vamos analisar um rotor no parque de diversões, mostrado na Fig. 4.28. Este rotor é constituído de um cilindro de raio R , com fundo, colocado para rodar com velocidade angular ω , tendo várias pessoas no seu interior. Assim que o cilindro atinge a rotação máxima, o fundo é retirado e as pessoas são mantidas no seu interior somente pelo atrito do contato com a parede. Sendo μ o coeficiente de atrito estático, g a aceleração da gravidade local, queremos encontrar a mínima velocidade angular capaz de manter a pessoa equilibrada. Neste caso, a força normal é dada pela força centrípeta e então,

$$Mg = \mu_e N = \mu_e M\omega^2 R \Rightarrow \omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_e R}}$$

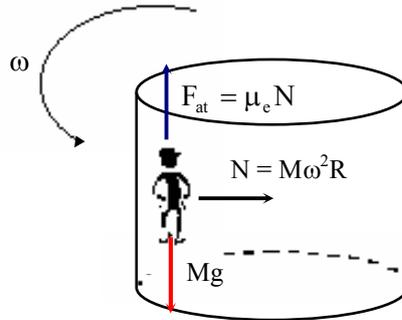


Fig. 4.28 - Rotor com atrito num parque de diversões.

Como exemplo final desta seção, vamos tratar o caso de uma polia com atrito. Como já discutimos anteriormente, uma polia ideal (sem atrito) apenas modifica a direção de uma força sem modificar seu valor. Queremos agora analisar como a presença do atrito modifica F_1 comparada com F_2 . Para isto, vamos tomar um elemento da polia mostrada na Fig. 4.29 e verificar as forças sobre ele.

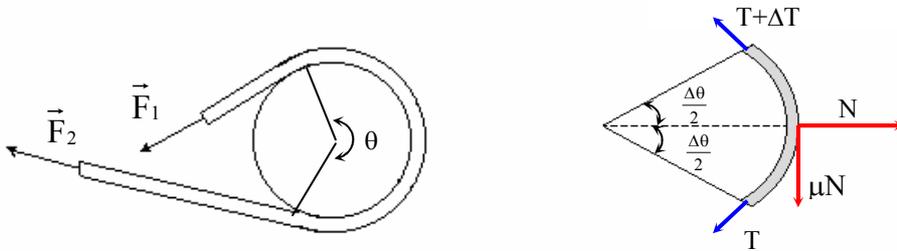


Fig. 4.29 - Corda em polia com atrito.

Na direção x:

$$N = (T + \Delta T)\text{sen}\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) + T\text{sen}\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

Como $\Delta\theta$ é pequeno, $\text{sen} \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$ e $\text{cos} \frac{\Delta\theta}{2} \approx 1$ e assim,

$$N = (T + \Delta T) \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) + T \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) = 2T \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) + \frac{\Delta T \Delta\theta}{2} \cong T \Delta\theta$$

Na direção y:

$$(T + \Delta T) \text{cos} \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) = T \text{cos} \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) + \mu N$$

$$\Rightarrow \Delta T = \mu N = \mu T \Delta\theta \Rightarrow \frac{\Delta T}{\Delta\theta} = \mu T$$

no limite em que $\Delta\theta \rightarrow 0$, temos $\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} (\Delta T / \Delta\theta) = dT / d\theta = \mu T$ e portanto:

$$\frac{dT}{T} = \mu d\theta \Rightarrow \int_{F_2}^{F_1} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^\theta d\theta$$

$$\ln \left(\frac{F_1}{F_2} \right) = \mu\theta \Rightarrow F_1 = F_2 \exp \{ \mu\theta \}$$

4.7 Forças inerciais

Quando a observação de um movimento é feita de um referencial não inercial (acelerado), as leis de Newton deixam de ser válidas, isto é, a força sobre o corpo não obedece a relação $\vec{F} = m d\vec{v} / dt$. Como a lei de força neste caso fica bastante difícil de ser escrita, principalmente porque ela depende da posição momentânea do corpo, nós introduziremos uma força extra no problema, que é *equivalente* ao efeito produzido pelo fato do referencial ser não inercial. Com a adição destas forças fictícias, chamadas de *forças inerciais*, a lei de Newton passa a ser novamente válida. Note que as forças inerciais simulam o efeito de uma força real, porém elas não são exercidas por nenhum elemento do sistema. Vamos ilustrar o uso das forças inerciais através dos vários exemplos que seguem.

a) Vagão acelerado

Vamos considerar um vagão acelerado como mostrado na Fig. 4.30 dentro do qual encontra-se um observador. Se deixarmos um corpo cair a partir do repouso, para um observador externo, a trajetória é tal que a única força agindo sobre o corpo é $M\vec{g}$.

Para um observador no interior do vagão acelerado, a trajetória do corpo é tal que indica a existência de uma força $-M\vec{a}$, de forma que a força total vista por ele é:

$$\vec{F} = M\vec{g} - M\vec{a}$$

onde o termo entre $-M\vec{a}$ é a força inercial.

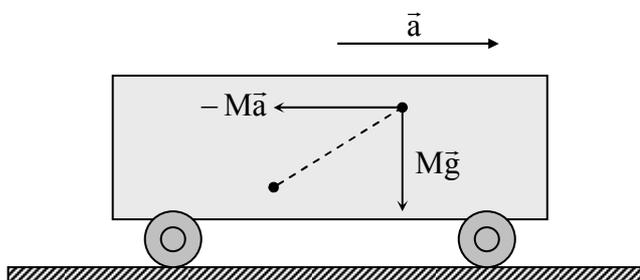


Fig. 4.30 - Corpo em queda livre visto por um observador acelerado.

Por outro lado, se o corpo estiver preso por uma corda no teto do vagão, um observador externo verá o corpo acelerado tal que:

$$\vec{T} + M\vec{g} = M\vec{a} \quad (\text{observador em repouso})$$

Para um observador no interior do vagão, o corpo não está acelerado e, portanto, para ele, a equação de forças é:

$$\vec{T} + M\vec{g} - M\vec{a} = \vec{0} \quad (\text{observador acelerado})$$

b) Força centrífuga

Consideremos uma plataforma girando com velocidade angular ω e sobre ela um corpo preso ao centro por uma haste sem massa, como mostrado na Fig. 4.31. Para um observador externo à plataforma, a única força agindo

sobre o corpo é a força centrípeta $F = M\omega^2 r$, que mantém o corpo na sua trajetória circular. Para este observador, a 2ª lei de Newton vale na sua forma usual:

$$\vec{F} = -M\omega^2 \vec{r} = M\vec{a}$$

Para um observador sobre a plataforma, o corpo está em repouso ($\vec{a} = \vec{0}$), porém a haste continua tensionada por um valor que pode ser medido com um dinamômetro. Para ele, deve então existir uma força contrária à da haste que mantenha o equilíbrio do corpo. Esta força também vale $M\omega^2 r$, porém é dirigida para fora do círculo. Ela é chamada de *força centrífuga* e só existe no referencial não inercial.

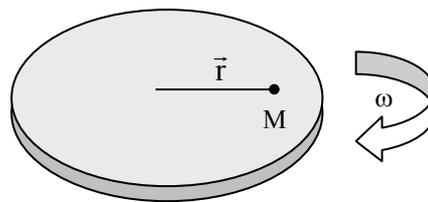


Fig. 4.31 - Corpo solidário a uma plataforma rodando com velocidade ω .

c) Força de Coriolis

Um segundo tipo de força inicial existente em referencial girante é a *força de Coriolis*, que depende da velocidade e é perpendicular a ela quando medida no referencial girante. Consideremos dois observadores, um no centro e o outro na borda de uma plataforma girante, como na Fig. 4.32. Num determinado instante, o observador do centro (A) arremessa um corpo com velocidade \vec{v} para o observador da borda (B).

Quando o corpo chega na borda, o observador B já deslocou-se de um ângulo θ e para ele, o corpo foi submetido a uma força que se desviou para a esquerda. O segmento de arco descrito pelo observador B, localizado a uma distância r do centro é $s = r\theta = r\omega t$. Por outro lado, o corpo anda uma distância r com velocidade constante v e portanto $r = vt$. Conseqüentemente, s

$= v \omega t^2$. Para o observador B, este segmento de arco é consequência da aceleração provocada pela força de Coriolis:

$$s = \frac{1}{2}(2v\omega)t^2 = \frac{1}{2}a_c t^2$$

ou então: $F_c = 2mv\omega$, perpendicular à velocidade. Esta força tem direção tangencial e o sentido oposto ao da rotação do referencial.



Fig. 4.32 - Observadores numa plataforma girante.

As forças inerciais em referenciais girantes são de extrema importância devido ao fato que a Terra é um referencial deste tipo. Estas forças podem ser escritas em termos de produtos vetoriais se considerarmos o vetor $\vec{\omega}$ como sendo perpendicular à plataforma girante.

$$\vec{F}_{\text{centrífuga}} = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) + m \vec{r} (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = m \omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}$$

onde \vec{v} é a velocidade no referencial girante.

Como exemplo do efeito da força de Coriolis, vamos analisar o caso de um corpo que cai de uma altura h sobre a superfície da Terra, na linha do Equador. Na ausência de rotação, o corpo cairia exatamente na direção radial. Devido à rotação da Terra, a força de Coriolis produzirá uma pequena deflexão que queremos calcular. Vamos desprezar a força centrífuga supondo que ela já está incluída em \vec{g} . Vamos fazer um cálculo simplificado para determinar a deflexão x . Suporemos $v = gt$ radial muito maior que a velocidade produzida pela força de Coriolis.

$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = 2\omega g t \Rightarrow v_c = \frac{dx}{dt} = \omega g t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}\omega g t^2$$

Como o tempo de queda é $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ temos $x = \frac{\omega g}{3} \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}$. Usando

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7.3 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ e } h = 100 \text{ m obtemos } x \approx 2 \text{ cm.}$$

Exercícios

- 1 - Encontre o ângulo θ da Fig. 4.33 tal que o sistema permaneça em repouso. Despreze o atrito.
- 2 - Encontre a razão entre as massas M_1 e M_2 tal que o sistema permaneça em repouso na Fig. 4.34. Despreze o atrito.

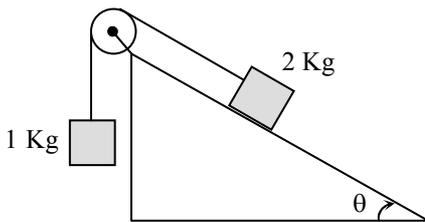


Fig. 4.33

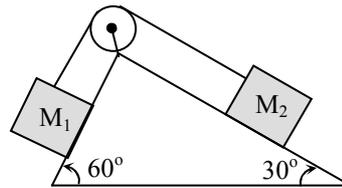


Fig. 4.34

- 3 - Encontre a aceleração do corpo de 2 Kg da Fig. 4.35.
- 4 - Encontre a massa do corpo A tal que a aceleração do corpo B da Fig. 4.36 é nula.

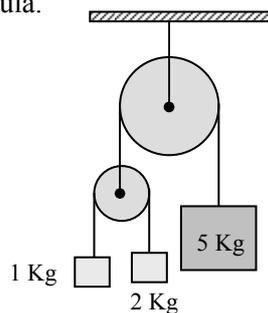


Fig. 4.35

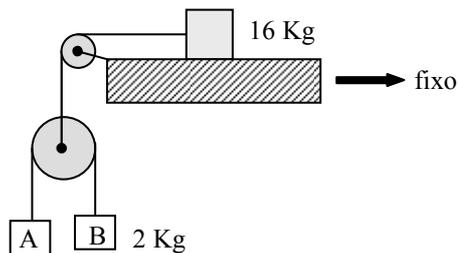


Fig. 4.36

- 5 - No sistema da Fig. 4.37 o corpo A desliza sobre uma superfície com coeficiente de atrito μ . As cordas e polias não têm massa.
- encontre as acelerações dos blocos A e B;
 - encontre a tensão na corda ligada ao corpo A.

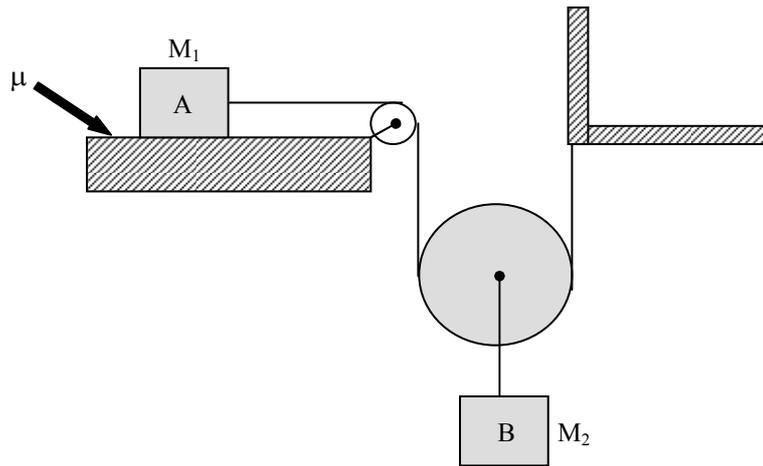


Fig. 4.37

- 6 - Dado o ângulo θ de um plano inclinado sem atrito, qual deve ser a aceleração a_R tal que o bloco de massa m mostrado na Fig. 4.38 não deslize?

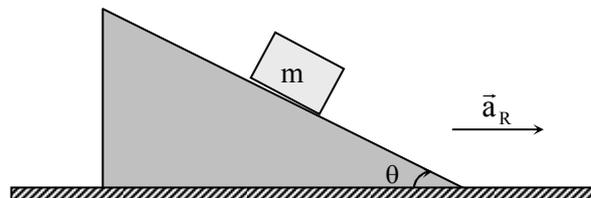


Fig. 4.38

- Se o plano inclinado do problema anterior tiver um coeficiente de atrito μ , qual são as acelerações máxima e mínima tal que o bloco não deslize?
- Uma corda de comprimento L e densidade linear de massa λ passa por uma polia sem atrito. Ela é solta do repouso, estando um comprimento x pendente de um lado e $L-x$ do outro.

- a) determine a aceleração como função de x ;
 b) para que situação a aceleração é nula?
- 9 - a) O sistema da Fig. 4.39 é livre de atrito. Determine o valor da força F tal que o corpo A não desça nem suba.
 b) Se houver um atrito estático μ entre as superfícies dos blocos, quais os valores de forças máxima e mínima tal que o corpo A não desça nem suba?

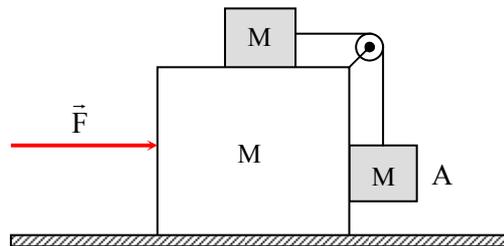


Fig. 4.39

- 10 - Um corpo com velocidade inicial v_0 penetra num meio que produz uma força viscosa $F = -b\sqrt{v}$. Determine a máxima distância que o corpo penetra neste meio.
- 11 - No sistema mostrado na Fig. 4.40 encontre: a) a aceleração do conjunto e b) a força na corda, no ponto A.
- 12 - O sistema mostrado na Fig. 4.41 usa polias sem massa. Encontre as acelerações de cada bloco e a tensão na corda.

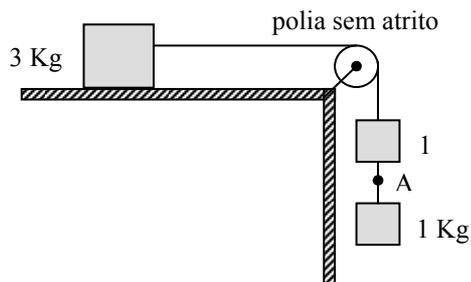


Fig. 4.40

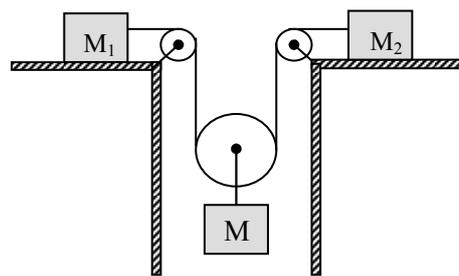


Fig. 4.41

- 13 - No sistema mostrado na Fig. 4.42, o bloco em contato com a superfície horizontal sem atrito está sujeito a uma força F . Existe um atrito estático μ entre este bloco e o bloco A de tal maneira que não existe movimento relativo entre os três blocos que compõem o sistema. Calcule: a) o ângulo θ , b) a tensão na corda e c) μ mínimo.
- 14 - N corpos ligados entre si através de cordas sem massa são puxados em uma rampa por meio de uma força F . Calcule a tensão na corda ligada ao i -ésimo corpo.
- 15 - Considere o pêndulo cônico mostrado na Fig. 4.43, onde a corda que liga a massa M ao ponto O não tem massa.
- encontre o ângulo θ como função da velocidade da massa M
 - encontre a tensão da corda no ponto O

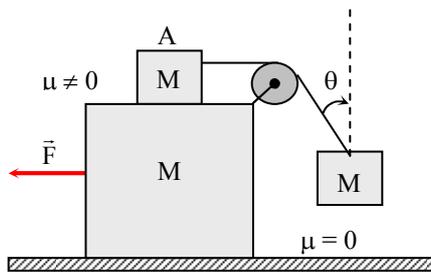


Fig. 4.42

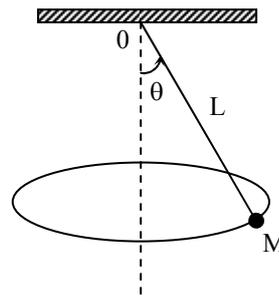


Fig. 4.43

- 16 - Um corpo de massa M encontra-se pendurado através de uma corda ideal sobre um bloco triangular de ângulo θ , conforme mostra a Fig. 4.44. Não existindo atrito entre os blocos, pergunta-se qual é a aceleração máxima que pode ser dada ao sistema tal que o corpo M permaneça em contato com o bloco triangular. Neste caso, qual é a tensão na corda? Se o sistema estiver se deslocando com velocidade constante, qual o valor da tensão na corda e da normal?
- 17 - Um bloco de massa M repousa sobre uma mesa com coeficiente de atrito estático μ_e . Uma força F é aplicada ao bloco de maneira a formar um ângulo θ com a horizontal, como mostra a Fig. 4.45.

Supondo que o bloco esteja sempre na iminência de deslizar, a) qual o ângulo θ_0 que permite que a força aplicada seja mínima? e b) neste caso, qual será o valor da força F_{\min} ?

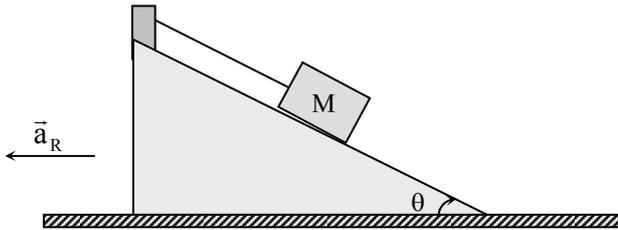


Fig. 4.44

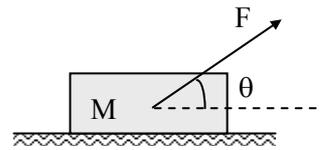


Fig. 4.45

- 18 – Um bloco de massa M_1 encontra-se sobre outro bloco de massa M_2 , que desliza sobre o chão, conforme mostra a Fig. 4.46. O atrito estático entre os dois blocos é μ_e e o atrito cinético entre o bloco 2 e o chão é μ_c . a) Determine a máxima força F que pode ser aplicada ao bloco 2 sem que o bloco 1 deslize sobre ele. b) se a força for aumentada tal que M_1 começa a deslizar, e o atrito cinético entre os blocos também é μ_c , qual será a aceleração de cada massa?
- 19 - Um bloco de massa M encontra-se sobre outro bloco de mesma massa, num plano inclinado liso, de ângulo θ , conforme mostra a Fig. 4.47. O atrito estático entre os dois blocos é μ , e entre o bloco inferior e o plano é zero. a) Determine a máxima força F que pode ser aplicada ao bloco superior sem que este deslize sobre o bloco inferior. b) Neste caso, qual será a aceleração do sistema?

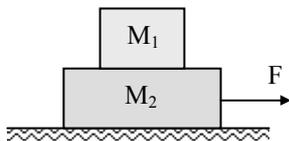


Fig. 4.46

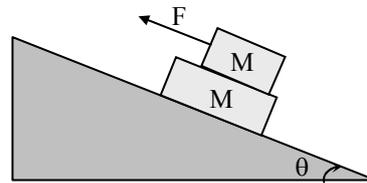


Fig. 4.47

- 20 - Um corpo de massa m encontra-se sobre um bloco triangular de ângulo θ e massa M , conforme mostra a Fig. 4.48. Não existe atrito entre o bloco triangular e o chão, e o atrito estático entre os dois blocos é μ . Pergunta-se: a) qual a força horizontal máxima F que pode ser aplicada ao bloco m tal que ele não deslize sobre a cunha? b) qual é o valor da normal nesta situação?

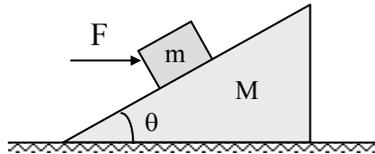


Fig. 4.48

TRABALHO E ENERGIA 5

5.1 Trabalho e energia cinética

O conceito de energia é um dos mais importantes em Física. De uma forma geral, dizemos que um corpo contém uma determinada quantidade de energia quando ele tem capacidade de exercer força e realizar trabalho sobre um segundo corpo. Para estabelecermos o conceito de energia, vamos inicialmente definir *trabalho* em uma dimensão como:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x) dx$$

que nada mais é do que a área da curva $F_x(x)$ entre os pontos x_1 e x_2 . Esta força é a força total agindo sobre o corpo, isto é,

$$F_x(x) = \sum_{i=1}^N F_{x_i}(x)$$

Vemos que só há realização de trabalho quando a força e o deslocamento forem não nulos. Podemos ainda definir um trabalho infinitesimal como sendo:

$$dW = F_x(x) dx$$

onde dx é um deslocamento infinitesimal no qual $F_x(x)$ pode ser considerada constante. A unidade de trabalho é $N.m \equiv J$ ou $\text{dyn.cm} \equiv \text{erg}$ ($1J = 10^7 \text{ erg}$).

A partir da definição de trabalho dada acima, podemos usar a 2ª Lei de Newton para definir o que é energia cinética.

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} m \frac{dv}{dt} dx = m \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} dx$$

$$W = m \int_{x_1}^{x_2} v \frac{dv}{dx} dx = \frac{m}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d(v^2)}{dx} dx = \frac{m}{2} v^2(x_2) - \frac{m}{2} v^2(x_1)$$

A quantidade $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}p^2/m$ é denominada de energia cinética. O resultado mostrado acima, chamado de *teorema do trabalho-energia*, estabelece que o trabalho realizado por um sistema de forças é igual à variação da energia cinética do corpo no intervalo considerado. Matematicamente,

$$W = K(x_2) - K(x_1)$$

Exemplo: Vamos considerar um corpo movendo-se sobre um plano com coeficiente de atrito dinâmico μ . Queremos determinar, usando trabalho e energia, qual é a variação da velocidade do corpo com a distância e qual é a distância percorrida até ele parar. A condição inicial para este exemplo é que na origem ($x = 0$) a velocidade é v_0 . A força agindo sobre o corpo é $F_{at} = -\mu N = -\mu Mg$ de forma que o trabalho é $W = -\mu Mgx$. Quando o trabalho é negativo significa que estamos retirando energia cinética do corpo. Pelo teorema trabalho-energia, temos:

$$W = -\mu Mgx = \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2$$

de onde encontramos:

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gx}$$

A posição para a qual o corpo pára é dada pela condição $v(x) = 0$, isto é, $x = v_0^2/(2\mu g)$.

O enfoque que demos ao trabalho até este ponto foi baseado no caso unidimensional. Podemos generalizar a definição de trabalho para o caso tridimensional esquematizado na Fig. 5.1 como:

$$W = \int_{S_1}^{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = K(S_2) - K(S_1)$$

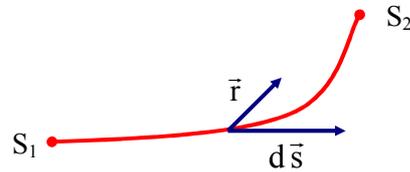


Fig. 5.1 - Realização de trabalho para o caso tri-dimensional.

e desta forma, apenas a componente da força paralela ao deslocamento realiza trabalho. Lembrando da definição de produto escalar, podemos escrever:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$$

de forma que o trabalho em três dimensões pode ser entendido como a soma dos trabalhos em cada dimensão. Este fato está de acordo com o princípio de Galileu da independência dos movimentos que vimos no Cap. 3. Como o produto $\vec{F} \cdot d\vec{s}$ pode variar ao longo do caminho de integração, o cálculo de W pode muitas vezes ser complicado. Como exemplo deste tipo de cálculo, vamos tomar o caso de um corpo descendo um plano inclinado sem atrito e partindo do repouso, como mostrado na Fig. 5.2.

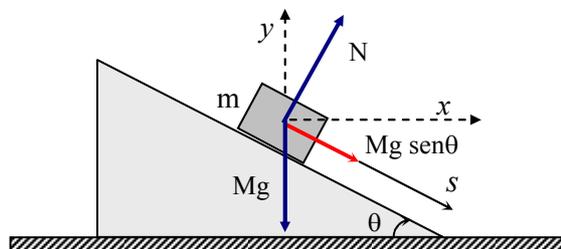


Fig. 5.2 - Corpo descendo um plano inclinado sem atrito.

Caso 1: Como primeira maneira de resolver este problema vamos considerar um eixo s paralelo ao plano e, conseqüentemente, também paralelo à componente de força $mg \sin\theta$ que realiza trabalho. As componentes N e mg

$\cos\theta$ são perpendiculares ao deslocamento e , portanto, não realizam trabalho.

Temos:

$$W = \int_0^s mg \sin\theta \, ds = mg \sin\theta s = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gs \sin\theta}$$

Caso 2: Podemos ainda escolher o sistema de coordenadas cartesianas xy também mostrado na Fig. 5.2. Usando $N = mg \cos\theta$, as equações neste caso ficam:

$$F_x = N \sin\theta = mg \sin\theta \cos\theta$$

$$F_y = N \cos\theta - mg = mg (\cos^2\theta - 1) = -mg \sin^2\theta$$

e assim podemos calcular o trabalho nas duas direções:

$$W_x = \int_0^x F_x dx = mg \sin\theta \cos\theta x = \frac{1}{2}mv_x^2$$

$$W_y = \int_0^y F_y dy = mg \sin^2\theta y = \frac{1}{2}mv_y^2$$

de onde tiramos: $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = 2g \sin\theta (x \cos\theta + y \sin\theta)$. Como $x = s \cos\theta$ e $y = -s \sin\theta$, temos: $v^2 = 2gs \sin\theta (\cos^2\theta + \sin^2\theta)$ e portanto, $v = \sqrt{2gs \sin\theta}$, que concorda com o resultado obtido anteriormente.

Caso 3: Uma terceira maneira de se calcular o trabalho realizado sobre um corpo é através da parametrização da trajetória, que se traduz no conhecimento de $y(x)$. Neste caso, de acordo com a Fig. 5.3,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \Rightarrow$$

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds = \int_{s_1}^{s_2} F_s(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

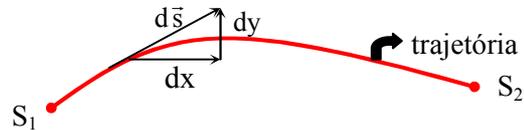


Fig. 5.3 - Parametrização de uma trajetória S .

No exemplo do plano inclinado que estamos tratando,

$$y = y_0 - \operatorname{tg}\theta x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\theta$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta} = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$F_s = mg \operatorname{sen}\theta \Rightarrow W = \int_0^z mg \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right) dx$$

$$\Rightarrow W = mg \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right) x = \frac{1}{2} mv^2$$

Como $x = s \cos\theta \Rightarrow v = \sqrt{2gs \operatorname{sen}\theta}$, como já havíamos encontrado.

Resumindo, vimos três maneiras de se calcular W . No caso 1), escolhemos uma *coordenada natural* para o problema e a solução foi simples. No caso 2), escolhemos coordenadas cartesianas e a solução já foi mais complicada. No caso 3), a trajetória foi parametrizada por $y = y(x)$, mas este método só é conveniente quando a trajetória for complicada, como por exemplo, $y = x^3/3$, etc.

Uma outra situação que consideraremos a seguir é a de um corpo vinculado a mover-se sobre um cilindro sem atrito e que é solto de um ângulo θ_0 com velocidade nula, como indica a Fig. 5.4. Uma análise rápida das forças agindo sobre o corpo indica que apenas a componente tangencial $mg \cos\theta$ é capaz de realizar trabalho. N e $mg \operatorname{sen}\theta$ são perpendiculares à trajetória. Neste

problema, a coordenada natural é o ângulo θ . Vemos que: $F_S = mg \cos\theta$ e $ds = -Rd\theta$, já que s e θ aumentam em sentidos opostos. Assim,

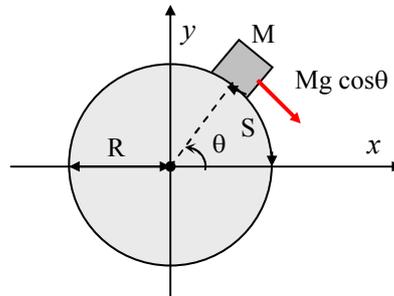


Fig. 5.4 - Corpo vinculado a mover-se sobre um cilindro sem atrito.

$$W = -\int_{\theta_0}^{\theta} mg \cos\theta R d\theta = -mgR(\text{sen } \theta - \text{sen } \theta_0)$$

$$W = \Delta K \Rightarrow mgR(\text{sen } \theta_0 - \text{sen } \theta) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow v(\theta) = \sqrt{2gR(\text{sen } \theta_0 - \text{sen } \theta)}$$

5.2 Potência

Quando um agente externo realiza trabalho sobre um corpo, podemos definir potência como sendo a taxa temporal de energia que ele é capaz de fornecer ao corpo. Assim, no caso de uma força constante, $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ e $P = dW/dt = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$. A unidade de potência é energia/tempo: $[P] = J/s \approx \text{Watt (W)}$.

5.3 Energia potencial

Nem sempre o trabalho realizado sobre um corpo por um agente externo é convertido totalmente em energia cinética. Muitas vezes o trabalho dá origem a um outro tipo de energia, chamada *energia potencial*. Analogamente à energia cinética, um corpo com energia potencial tem a

capacidade de realizar trabalho. Em geral, nesta situação existe um agente externo realizando trabalho sobre o sistema de interesse. Através da realização deste trabalho, o agente externo transfere energia para o sistema, que a armazena de alguma forma. Quando o agente externo é retirado, o sistema libera a energia armazenada (energia potencial) através da realização de trabalho e converte esta energia em energia cinética.

Dentre os vários tipos de energia potencial, os mais comuns são a gravitacional, elástica (mola) e elétrica (Coulombiano). Como exemplo de energia potencial gravitacional, vamos considerar um corpo que se desloca uma altura $\Delta h = h_2 - h_1$. Para isto é necessário um agente externo trabalhando contra a força peso, como indicado na Fig. 5.5. Neste caso, $F_{\text{ext}} = mg$ e o trabalho realizado é:

$$W_{\text{ext}} = F_{\text{ext}} \Delta h = mg \Delta h = U_2 - U_1$$

onde $U = mgh$ é definido como energia potencial gravitacional. O trabalho feito pela força peso é

$$W_p = -mg \Delta h = -(U_2 - U_1)$$

Se soltarmos o corpo, a energia potencial $\Delta U = mg \Delta h$ se transformará em energia cinética. Na verdade, o que fazemos é dar condições para a força peso realizar trabalho:

$$W = mg \Delta h = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2g \Delta h}$$

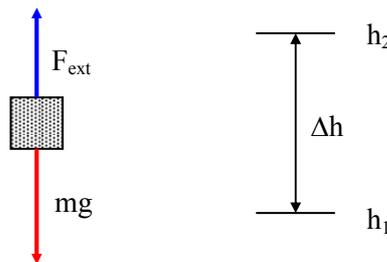


Fig. 5.5 - Corpo sob a ação da força gravitacional.

5.4 Forças conservativas

Como vimos na secção anterior, a energia potencial está associada à existência de uma força à qual demos condições de realizar trabalho. Como exemplo, temos a força gravitacional, força eletrostática e força elástica (de mola). Estas forças são denominadas *conservativas*. Quando as forças conservativas são as únicas existentes no sistema, a soma das energias cinética e potencial (chamada de *energia mecânica total*) permanece constante.

Se uma força é conservativa, o trabalho total realizado sobre um corpo é nulo do ele efetua uma trajetória fechada e retorna à posição inicial. Isto quer dizer na trajetória fechada a força conservativa não retira e nem cede energia ao sistema. Matematicamente,

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Imaginemos que um corpo está indo do ponto S_1 ao ponto S_2 pela trajetória C_1 , sob ação de uma força conservativa, como mostra a Fig. 5.6. Ao atingir S_2 , o corpo retorna ao ponto inicial S_1 pelo caminho C_2 .

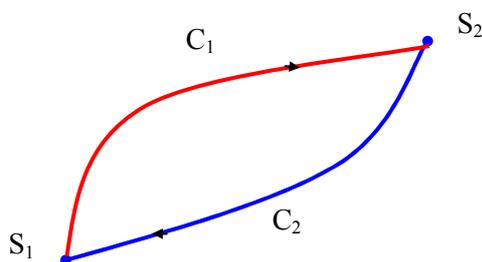


Fig. 5.6 - Trajetória fechada seguida pelo corpo sob a ação de força conservativa.

Nestas condições temos:

$$\begin{aligned} \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \\ \Rightarrow \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= -\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

Por outro lado, se invertermos o sentido de percurso do caminho C_2 , a integral muda de sinal e assim,

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Conseqüentemente, concluímos que o trabalho realizado por uma força conservativa independe do caminho que conecta os pontos 1 e 2. Ele só depende da posição dos pontos inicial e final do movimento, o que torna lógico associar-se uma energia potencial a cada ponto do percurso. Lembrando-me do caso da força peso,

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = -(U_2 - U_1) = -\Delta U$$

e para um deslocamento infinitesimal, $dW = -\vec{F} \cdot d\vec{s}$. As energias potenciais mais comuns são:

a) gravitacional (próximo à superfície da Terra): $\vec{F} = -mg\hat{y}$, $d\vec{s} = d\vec{y}$

$$\Rightarrow U_2 - U_1 = -\int_{y_1}^{y_2} (-mg)dy = mgy_2 - mgy_1$$

Portanto, $U(y) = mgy + C$

b) Elástica (de uma mola): $\vec{F} = -kx\hat{x}$, $d\vec{s} = d\vec{x}$

$$U(x_2) - U(x_1) = k \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

c) Eletrostática: $\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\hat{r}$ e $\hat{r} \cdot d\vec{s} = dr$

$$U(r_2) - U(r_1) = -\int_{r_1}^{r_2} -\frac{\alpha}{r^2} dr = -\alpha \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \Rightarrow U(r) = -\frac{\alpha}{r} + C$$

5.5 Determinação da força a partir da energia potencial

Corno vimos anteriormente, à toda força conservativa está associada uma energia potencial. Muitas vezes conhecemos a energia do sistema e a partir dela queremos encontrar a força e o movimento do corpo. Considerando apenas o caso unidimensional,

$$dU = -F_x dx \Rightarrow F_x = -\frac{dU}{dx}$$

ou seja, o conhecimento da energia potencial permite o cálculo da força que age sobre o corpo. No caso de forças radiais, é fácil verificar que:

$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

O uso desta expressão é importante quando queremos determinar as posições de equilíbrio de um corpo. Consideremos, por exemplo, a energia potencial de uma mola, que como vimos, é dada por: $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$. Neste caso, $F(x) = -kx$. Vemos que no ponto $x = 0$, $dU/dx = 0$ e assim $F(0) = 0$ e assim esta é uma posição de equilíbrio. Neste caso, o equilíbrio é estável, pois quando o corpo se afasta da origem a mola exerce uma força restauradora no sentido de trazê-lo de volta. Por outro lado, se considerarmos um potencial do tipo:

$$U(x) = \frac{C}{x^2 + a^2}$$

como mostra a Fig. 5.7, a força será dada por:

$$F_x = \frac{2C_x}{(x^2 + a^2)^2}$$

Neste caso também temos $dU/dx = 0$ em $x = 0$, porém agora o equilíbrio é instável pois quando o corpo se afastar da origem, teremos uma força positiva que o obriga a se afastar ainda mais. Note que:

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0} = -\frac{2C}{a^4} < 0$$

De um modo geral, dado $U(x)$, teremos equilíbrio se $U'(x_0) = 0$. O equilíbrio será estável se $U''(x_0) > 0$ e instável se $U''(x_0) < 0$, onde x_0 é o ponto de equilíbrio.

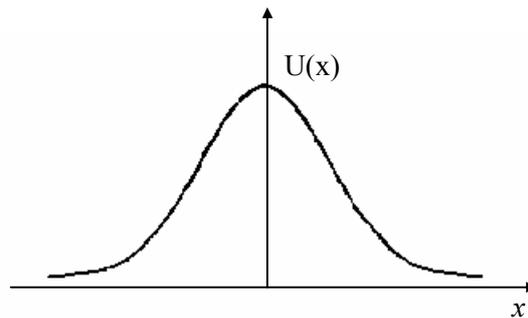


Fig. 5.7 – Potencial com ponto de equilíbrio instável.

5.6 Forças dissipativas

Além das forças conservativas temos ainda as chamadas forças *dissipativas*, que ao contrário das primeiras, removem energia do sistema, transformando-as em outras formas de energia, como por exemplo, calor. Na presença de forças dissipativas, o trabalho realizado por estas forças é igual à variação da energia mecânica total do sistema. Tomemos por exemplo, o caso do atrito. Lançando-se um corpo de massa m com velocidade v_0 sobre a mesa com atrito μ , o trabalho realizado pela força de atrito é:

$$W = -\mu mg \Delta x = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

onde Δx é a distância percorrida pelo corpo e a diferença de energia é dissipada na forma de calor.

5.7 Conservação de energia

Até agora vimos que um sistema mecânico pode apresentar dois tipos de energia potencial, do tipo:

$$U(\vec{r}) = -\int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + C$$

e a cinética:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

A soma dessas energias é denominada energia mecânica total do sistema num determinado ponto

$$E_{\text{mec}} = U + K$$

Na ausência de forças dissipativas esta quantidade é uma constante de movimento, isto é,

$$\frac{dE_{\text{mec}}}{dt} = 0$$

Como exemplo, vamos considerar o sistema massa-mola na ausência de forças dissipativas. A energia mecânica é dada por:

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Como $m dv/dt = -kx$ e $dx/dt = v$, temos:

$$\frac{dE_{\text{mec}}}{dt} = -vkx + vkx = 0$$

No caso de haver forças dissipativas,

$$\Delta E_{\text{mec}} = W_{\text{fd}} \Rightarrow \frac{dE_{\text{m}}}{dt} = P$$

onde P é a energia dissipada. No caso do problema com atrito que resolvemos na secção anterior temos:

$$a = -\mu g \Rightarrow v(x) = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g x}$$

$$\Delta E_{\text{mec}} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\mu m g x$$

$$\frac{dE_{\text{mec}}}{dt} = -\mu m g v(x) = -\mu m g \sqrt{v_0^2 - 2\mu g x}$$

Um gráfico desta potência como função de x está mostrado na Fig. 5.8.

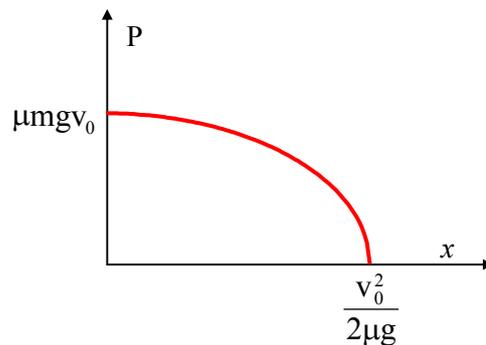


Fig. 5.8 - Potência como função da posição.

O uso da lei de conservação de energia é muito importante porque quase sempre permite a resolução de problemas sem a necessidade de se resolver a equação de movimento. Vamos a seguir apresentar alguns exemplos que utilizam o princípio da conservação de energia.

a) Pêndulo simples

Este problema já foi resolvido através da 2ª Lei de Newton, de onde obtivemos $v^2(\theta) = 2Lg(\cos \theta - \cos \theta_0)$. Vamos obter este mesmo resultado usando conservação de energia. O pêndulo é solto com $v_0 = 0$ na posição θ_0 , como indica a Fig. 5.9. Escolhendo a posição do teto como $U = 0$, temos

$$E(\theta_0) = -mgL \cos \theta_0$$

$$E(\theta) = -mgL \cos \theta + \frac{1}{2} m v^2$$

$$E(\theta) = E(\theta_0) \Rightarrow mgL \cos \theta_0 = -mgL \cos \theta + \frac{1}{2}mv^2$$

de onde tiramos que $v^2(\theta) = 2Lg(\cos \theta - \cos \theta_0)$.

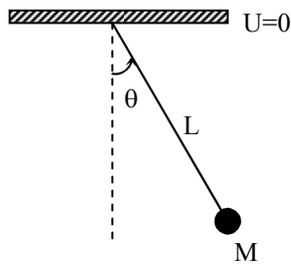


Fig. 5.9 - Pêndulo simples.

b) Máquina de Atwood

Este dispositivo, também já discutido com a 2ª Lei de Newton está esquematizado na Fig. 5.10. Vamos supor que os corpos são soltos em y_{10} e y_{20} . A conservação da energia mecânica fornece:

$$m_1 g y_{10} + m_2 g y_{20} = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Derivando em relação ao tempo temos: $0 = m_1 g v_1 + m_2 g v_2 + m_1 v_1 dv_1/dt + m_2 v_2 dv_2/dt$, onde $a_1 = dv_1/dt$ e $a_2 = dv_2/dt$. Como a corda é inextensível,

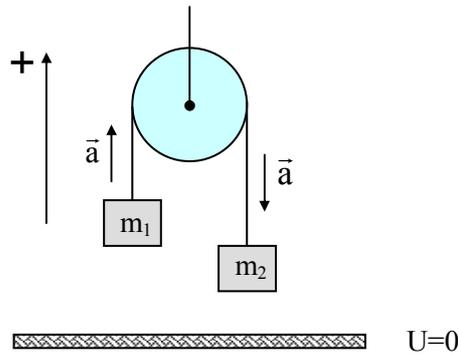


Fig. 5.10 - Máquina de Atwood.

$v_2 = -v_1$ e $a_2 = -a_1$, e portanto: $0 = (m_1 - m_2)gv_1 + (m_1 + m_2)av_1$, de onde sai que:

$$a_1 = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)}g$$

para cima, pois é positiva e $a_2 = -a_1$, para baixo pois é negativa.

c) Corpo preso num aro por meio de uma mola

Vamos considerar um corpo de massa m preso a um aro sem atrito através de uma mola constante k e comprimento livre nulo. O corpo é solto do ponto 0 mostrado na Fig. 5.11, com velocidade inicial nula. Queremos encontrar as velocidades nos pontos 1 e 2. Usando conservação da energia mecânica temos:

$$E(0) = \frac{1}{2}k(2R)^2 + mg(2R)$$

$$E(1) = \frac{1}{2}k(\sqrt{2}R)^2 + mgR + \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$E(2) = \frac{1}{2}mv_2^2$$

Fazendo $E(0) = E(1)$ e $E(0) = E(2)$ obtemos respectivamente:

$$v_1^2 = 2 \frac{kR^2 + mgR}{m} \text{ e } v_2^2 = 4 \frac{kR^2 + mgR}{m}, \text{ e portanto, } v_2 = \sqrt{2} v_1.$$

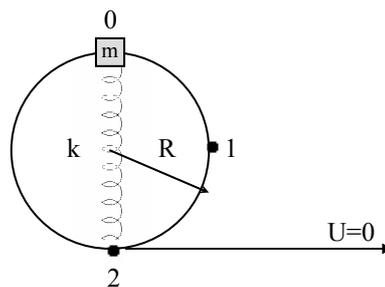


Fig. 5.11 - Corpo preso num aro por meio de uma mola.

d) Força viscosa

Vamos ver um exemplo onde a energia não se conserva. Consideremos um corpo lançado com velocidade v_0 num meio viscoso cuja força de atrito é $F = -bv$. Neste caso não temos energia potencial, só energia cinética. No início do movimento, $K = \frac{1}{2}mv_0^2$. Para um deslocamento infinitesimal Δx :

$$\Delta K = K(v + \Delta v) - K(v) = -bv\Delta x$$

$$\frac{dK}{dx} = -bv \Rightarrow \frac{dK}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dK}{dt} \frac{1}{v} = -bv$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = -bv^2$$

Como $K = \frac{1}{2}mv^2$ temos $v^2 = \frac{2K}{m}$. Logo,

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{2b}{m}K \Rightarrow \frac{dK}{K} = -\frac{2b}{m}dt$$

Integrando entre 0 e t temos: $\ln\left(\frac{K}{K_0}\right) = -\left(\frac{2b}{m}\right)t$, de onde sai que: K

$= K_0 \exp\{-2bt/m\}$ e portanto, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \exp\{-2bt/m\}$. Tirando a raiz obtemos: $v = v_0 \exp\{-bt/m\}$, que coincide com o resultado obtido com a 2ª lei de Newton.

5.8 Corpo sob a ação de um potencial arbitrário

Quando um corpo move-se num potencial arbitrário conservativo, como aquele mostrado na Fig. 5.12, a energia total $E = \frac{1}{2}mv^2(x) + U(x)$ é uma constante de movimento. Nos pontos x_1 e x_2 , $K = 0$, $E = U(x_{1,2})$ e, portanto, $v = 0$. Estes pontos são chamados pontos de retorno. O movimento

só ocorre entre x_1 e x_2 , pois fora desta região $U(x) > E$ e a energia cinética teria que ser negativa, o que implicaria numa velocidade imaginária. Para encontrarmos a equação de movimento, fazemos:

$$v(x) = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{\frac{2}{m}} dt$$

Integrando esta igualdade teremos $x = x(t)$, que representa a equação de movimento.

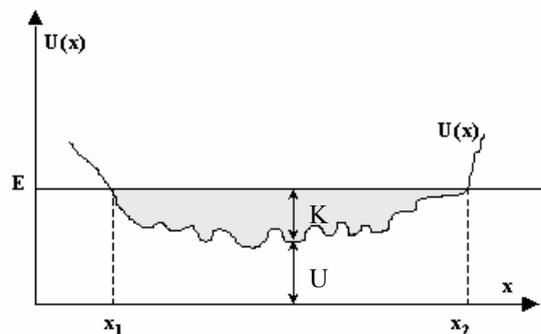


Fig. 5.12 - Corpo movendo-se num potencial arbitrário.

Exercícios

- 1 - Um corpo é acelerado uniformemente a partir do repouso até atingir a velocidade v_f no tempo t_f . Mostre que a potência instantânea fornecida ao corpo é:

$$P(t) = mv_f^2 \frac{t}{t_f^2}$$

- 2 - Considere o sistema da Fig. 5.13, onde a força F é constante e os planos têm coeficiente de atrito dinâmico μ . Calcule o trabalho total realizado pelas forças agindo no sistema quando o mesmo desloca-se uma distância infinitesimal Δx .

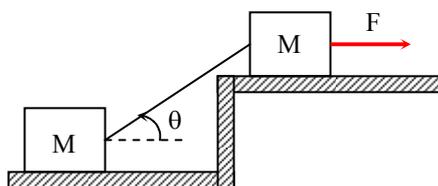


Fig. 5.13

- 3 - Considere o potencial de Lennard-Jones comumente utilizado como sendo a energia de interação entre dois átomos constituindo uma molécula:

$$U(r) = C \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right]$$

- a) Faça um gráfico de $U(r)$ contra r , b) Mostre que o mínimo de energia (posição de equilíbrio) ocorre em r_0 , c) Ache a força entre os átomos como função de r e d) Qual é a energia necessária para separar os átomos que constituem a molécula?
- 4 - Um pêndulo de massa m e comprimento ℓ é solto do ponto $\theta = 60^\circ$ a partir do repouso, como indicado na Fig. 5.14. Ao atingir a posição vertical $\theta = 0^\circ$, o cordão do pêndulo encontra um prego colado a uma distância d do teto. Encontre a distância d mínima que a massa m execute rotação ao redor do prego.
- 5 - Um corpo de massa m move-se no interior de um trilho circular vertical de raio R (Fig. 5.15). Quando m está na posição mais baixa sua velocidade é v_0 . a) Qual é o mínimo valor de v_0 tal que o corpo percorra todo o trilho? b) Se v_0 for 78% do valor determinado em a), o corpo sobe pelo trilho até o ponto P, perderá contato com o trilho. Determine a coordenada θ deste ponto.
- 6 - Um corpo de massa M , sujeito a um potencial $U(x) = -\cos\pi x$, é solto na origem ($x = 0$) com velocidade v_0 . a) Faça um esboço do potencial na região $-1 \leq x \leq 1$; b) Encontre a força $F(x)$ agindo no corpo e c) Qual é a máxima velocidade v_0 que pode ser dada ao corpo de tal maneira que ele fique confinado na região $-1 \leq x \leq 1$?

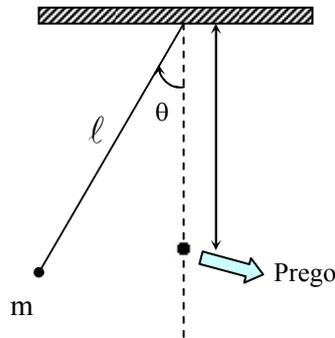


Fig. 5.14

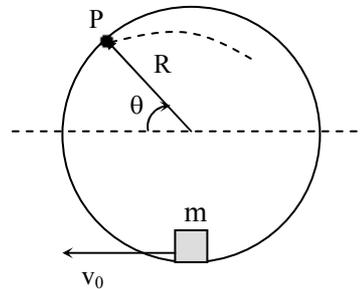


Fig. 5.15

- 7 - Uma massa m escorrega sem atrito ao longo da montanha russa mostrada na Fig. 5.16. A parte circular tem raio R e a massa parte do repouso no ponto B , à altura h medida em relação à base dos trilhos. a) Qual é a energia cinética de m no ponto P ? b) Qual é a aceleração de m no ponto P , admitindo que a massa permaneça no trilho? c) Qual é o menor valor de h para que m execute o movimento circular? d) Para um valor h maior do que este mínimo escreva a expressão da força normal exercida pelo trilho sobre a massa.
- 8 - Um corpo de 2 Kg é solto num plano inclinado de um ponto que dista 4 m de uma mola de constante de força $k = 100 \text{ N/m}$. A mola está fixa paralelamente ao plano, inclinada de $\theta = 30^\circ$ (Fig. 5.17). a) Calcular a compressão máxima da mola, admitindo que a sua massa seja desprezível; b) Calcular a compressão máxima da mola, quando o plano inclinado tem atrito (coeficiente de atrito entre ele e o corpo igual a $0,2$); c) No caso do plano com atrito, qual a altura atingida pelo corpo no seu retorno para cima?
- 9 - Dois corpos andando com mesma velocidade v sobre um plano horizontal estão distanciados de d . Após subirem uma ladeira de altura h , qual será a distância entre eles? (Fig. 5.18).

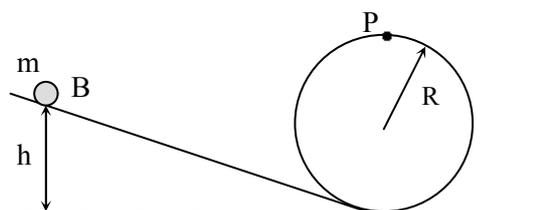


Fig. 5.16

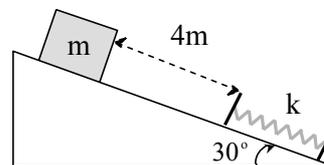


Fig. 5.17

- 10 - Um bloco desliza com velocidade v_0 sobre um plano horizontal sem atrito. Subitamente ele encontra uma rampa com ângulo de inclinação θ e coeficiente de atrito dinâmico μ . Qual altura máxima H o bloco sobe na rampa?
- 11 - Um corpo de massa M é preso por uma corda de comprimento L e pode rodar em torno do ponto O , como indicado na Fig. 5.19. Qual é a mínima velocidade que o corpo pode ter ao passar pelo plano horizontal de forma que ele fique em movimento circular?

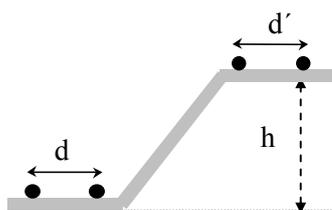


Fig. 5.18

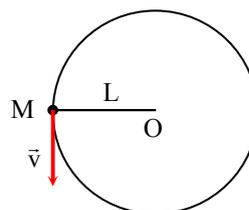


Fig. 5.19

- 12 - Um corpo colocado exatamente na vertical de uma superfície cilíndrica sem atrito, começa a deslizar com velocidade v_0 , conforme mostra a Fig. 5.20. (a) Encontre sua velocidade em função do ângulo θ . (b) Encontre a força normal como função do ângulo θ . (c) Determine o ângulo θ para o qual o corpo se desprende do cilindro.
- 13 - Um corpo de massa m é preso a uma mola vertical, de constante de mola k , como mostra a Fig. 5.21. O corpo é solto a partir do repouso, da posição $y=0$, sendo que nesta situação a mola não está distendida. a) Escreva a energia potencial como função de y (tome o zero de energia potencial

gravitacional na posição onde a mola não está distendida). b) Complete quadrados e faça um gráfico de $U(y)$ contra y , c) usando este gráfico, encontre a posição de equilíbrio do corpo, d) qual é o deslocamento máximo realizado pelo corpo? e) qual é a velocidade máxima atingida pelo corpo?

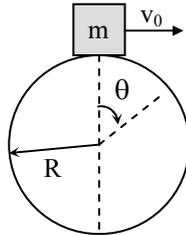


Fig. 5.20

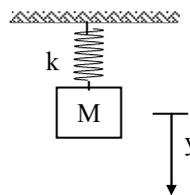


Fig. 5.21

- 14 - Um pêndulo simples de massa m e comprimento L encontra-se em repouso na vertical. Subitamente a massa recebe um impulso instantâneo que lhe confere uma velocidade v_0 , como mostra a Fig. 5.22. Encontre: a) a velocidade tangencial como função do ângulo θ , b) a tensão na corda como função do ângulo θ , c) a menor velocidade $(v_0)_{\min}$ que permite ao pêndulo realizar uma volta completa em torno do pino O .
- 15 - Um bloco de massa M desliza sobre uma mesa com coeficiente de atrito cinético $\mu = 3/4$. Ele colide com uma mola de massa desprezível, de constante de mola k , inicialmente na posição relaxada, como mostra a Fig. 5.23. Na hora que o bloco atinge a mola ele possui velocidade $v_0 = \sqrt{Mg^2/k}$. a) encontre a energia cinética como função da posição x , b) complete quadrados e faça um gráfico de $E_k(x)$, c) qual a deformação máxima da mola? d) que fração da energia inicial é dissipada pelo atrito neste processo?

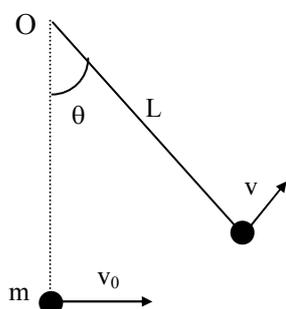


Fig. 5.22

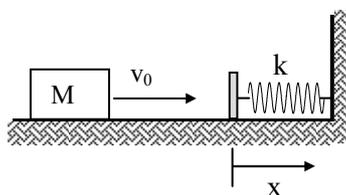


Fig. 5.23

- 16 - Considere um corpo de massa m preso a um aro de raio R , sem atrito, através de uma mola de constante k e comprimento livre nulo, como mostra a Fig. 5.24. O corpo é solto do ponto O com velocidade inicial nula. Tomando o zero da energia potencial gravitacional como mostrado na figura, encontre: a) a energia mecânica do sistema no ponto O , b) uma expressão para a energia mecânica no ponto P descrito pelo ângulo θ , c) a velocidade da massa no ponto P , d) a força de reação do trilho no ponto P , e e) o menor valor de k para que a massa permaneça em contato com o trilho.

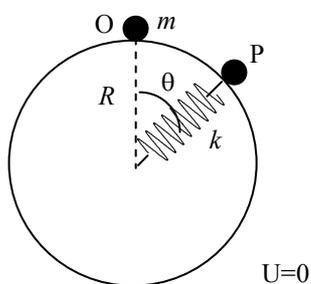


Fig. 5.24

SISTEMA DE PARTÍCULAS CONSERVAÇÃO DE MOMENTUM

6

6.1 Centro de massa

Quando forças externas agem sobre um sistema composto de vários corpos, cada um deles movimenta-se, em princípio, de uma forma diferente. O movimento total do sistema é bastante complicado, porém existe um ponto particular, chamado *centro de massa*, cujo movimento pode ser encontrado com facilidade. Sua introdução visa facilitar a solução de problemas envolvendo muitos corpos e seu comportamento é como se toda massa do sistema estivesse concentrada sobre ele. Para um sistema composto de N massas, o centro de massa é definido como:

$$\left(\sum_{i=1}^N m_i \right) X_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i x_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^N m_i \right) Y_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^N m_i \right) Z_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i z_i$$

onde (X_{CM}, Y_{CM}, Z_{CM}) são as coordenadas do centro de massa e (x_i, y_i, z_i) são as coordenadas do i -ésimo corpo. Para um sistema de duas partículas em uma dimensão, por exemplo,

$$MX_{CM} = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

Tomemos alguns casos particulares:

a) $m_1 = m_2, x_1 = 0, x_2 = d \Rightarrow X_{CM} = d/2$

$$b) m_1 = 2m_2, x_1 = 0, x_2 = d \Rightarrow X_{CM} = d/3$$

Para um sistema com distribuição contínua de massa, fazemos $m_i \rightarrow dm$, $\Sigma \rightarrow \int_V$ e a definição de X_{CM} é generalizada como:

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \int_V x dm$$

Como exemplo, vamos calcular a posição do centro de massa de uma barra rígida de comprimento L e a massa M , mostrada na Fig. 6.1. Neste caso:

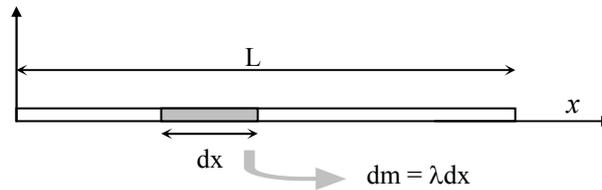


Fig. 6.1 - Barra rígida de comprimento L e massa M .

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^L x dm = \frac{1}{M} \int_0^L \lambda x dx$$

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \left(\frac{M}{L} \right) \frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

Como segundo exemplo, vamos encontrar o centro de massa de um semicírculo de raio R e massa M mostrado na Fig. 6.2, onde πR é o comprimento do semicírculo.

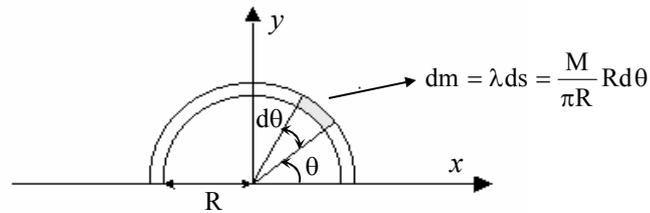


Fig. 6.2 - Semicírculo de raio R e massa M .

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^\pi R \cos \theta \left(\frac{M}{\pi R} \right) R d\theta = \frac{R}{\pi} \int_0^\pi \cos \theta d\theta = \frac{R}{\pi} \sin \theta \Big|_0^\pi = 0$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^\pi R \sin \theta \left(\frac{M}{\pi R} \right) R d\theta = \frac{R}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -\frac{R}{\pi} \cos \theta \Big|_0^\pi = \frac{2R}{\pi} \cong 0.6 R$$

6.2 Movimento do centro de massa

Tomando a derivada temporal na equação que define a coordenada X_{CM} do centro de massa em uma dimensão, temos:

$$M \frac{dx_{CM}}{dt} = m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} + \dots$$

onde $p_i = m_i v_i$ é o momentum do i -ésimo corpo. Tomando-se novamente a derivada temporal e usando-se a 2ª Lei de Newton:

$$M \frac{dV_{CM}}{dt} = M a_{CM} = \sum_{i=1}^N \frac{dp_i}{dt} = \sum_{i=1}^N F_i = F$$

Assim, a resultante de todas as forças atuantes sobre o sistema obedece a 2ª Lei de Newton, desde que seu efeito seja considerado sobre o centro de massa. É interessante notar-se que quando somamos todas as forças existentes no sistema, estamos considerando, além das forças externas, as forças internas exercidas por um corpo sobre o outro. Desta forma

$$F = \sum_{i=1}^N F_i = \sum_{i=1}^N F_i^{int} + \sum_{i=1}^N F_i^{ext}$$

Como sabemos, as forças internas sempre ocorrem aos pares (ação - reação) e cancelam-se mutuamente quando efetuamos a soma sobre todos os constituintes do sistema $\left(\sum_{i=1}^N F_i^{int} = 0 \right)$. Assim, costumamos dizer que as forças internas não modificam o estado de movimento do sistema como um todo e portanto,

$$M\mathbf{a}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{F}^{\text{ext}}$$

Somente forças externas são capazes de modificar o estado de movimento do centro de massa do sistema, que se move como se fosse uma única partícula de massa $M = \sum_{i=1}^N m_i$, sob a ação da força externa resultante que atua no sistema.

Exemplo: Imaginemos um projétil lançado obliquamente que explode no ponto alto da trajetória de modo que a primeira metade cai verticalmente, conforme mostra a Fig. 6.3. Queremos calcular a trajetória da segunda metade. Existe apenas a força externa peso agindo sobre o sistema. Desta forma, de acordo com o que vimos no Cap. 3 sobre lançamento de projéteis,

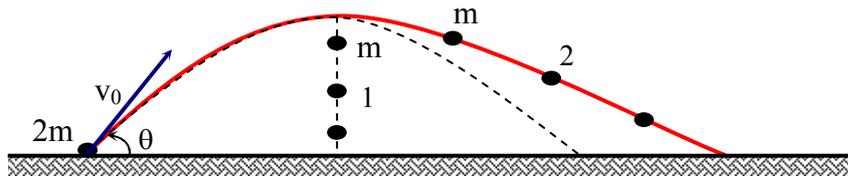


Fig. 6.3 - Projétil lançado obliquamente que explode no ponto alto da trajetória.

$$X_{\text{CM}} = v_0 \cos \theta t$$

$$Y_{\text{CM}} = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

Após a explosão, que ocorre em $t_{\text{max}} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$, tempo que a massa $2m$

demora para atingir o topo da trajetória, temos:

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} = \text{constante}$$

$$y_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} - g \frac{(t - t_{\text{max}})^2}{2} = v_0 \sin \theta t - g \frac{t^2}{2} = Y_{\text{CM}}$$

Vemos que a altura da massa 1 é a mesma que a do centro de massa, ou em outras palavras, eles caem juntos. Podemos calcular a posição da massa 2 de acordo com:

$$X_{\text{CM}} = v_0 \cos \theta t = \frac{1}{2m} \left[mx_2 + \frac{mv_0^2 \sin 2\theta}{2g} \right]$$

$$\Rightarrow x_2(t) = 2v_0 \cos \theta t - \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

e,

$$Y_{\text{CM}} = v_0 \sin \theta t - \frac{gt^2}{2} = \frac{1}{2m} \left[my_2 + m \left(v_0 \sin \theta t - \frac{gt^2}{2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow y_2(t) = v_0 \sin \theta t - \frac{gt^2}{2} = Y_{\text{CM}}$$

que assim como m_1 cai junto com o centro de massa. Da equação para $x_2(t)$ eliminamos o tempo:

$$t = \frac{x_2 + v_0^2 \sin 2\theta / 2g}{2v_0 \cos \theta}$$

e pela substituição deste em $y_2(t)$ encontramos a equação da trajetória $y_2(x_2)$ após a explosão:

$$y_2(x_2) = \frac{\text{tg}\theta}{2} \left(x_2 + \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} \right) - \frac{g}{2} \frac{(x_2 + v_0^2 \sin 2\theta / 2g)^2}{4v_0^2 \cos^2 \theta}$$

Daqui obtemos que $y_2 = 0$ ocorre quando $x_{\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$, como

esperado. Na ausência de forças externas, a velocidade do centro de massa é constante, de onde segue que $P = \sum_i m_i v_i$ também é uma constante de movimento. Isto quer dizer que durante colisões ou movimentos relativos entre as várias partes do sistema, o momentum total é conservado. Quando

estudamos colisões, as leis de conservação de energia e *momentum* serão de extrema importância.

6.3 Sistemas onde a massa varia

Sistemas onde a massa varia são difíceis de serem resolvidos pela aplicação direta da 2ª Lei de Newton porque m e v variam simultaneamente. Vamos considerar a situação mostrada na Fig. 6.4. Uma quantidade de massa Δm , com velocidade \vec{v}' , deposita-se sobre um corpo de massa m deslocando-se com velocidade \vec{v} . Vamos supor a existência de uma força \vec{F} que pode alterar o momentum do sistema. No instante imediatamente anterior à colisão:

$$P(t) = m\vec{v} + \Delta m\vec{v}'$$

e no instante imediatamente posterior à colisão:

$$\vec{P}(t + \Delta t) = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) \approx m(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta m\vec{v}$$

onde o termo de ordem superior $\Delta m \Delta\vec{v}$ foi desprezado por ser muito pequeno.

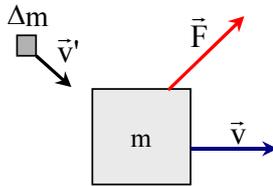


Fig. 6.4 - Sistema com massa variável.

A variação do momentum é dada por:

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}(t + \Delta t) - \vec{P}(t) = m\Delta\vec{v} - \Delta m(\vec{v}' - \vec{v})$$

Podemos reconhecer $\vec{u} = \vec{v}' - \vec{v}$ como sendo a velocidade de Δm relativa à massa m , de forma que ficamos com: $\Delta\vec{P} = m\Delta\vec{v} - \Delta m\vec{u}$. Dividindo-se esta expressão por Δt e tomando o limite para $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

ou alternativamente,

$$m\vec{a} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u}$$

que é a 2ª lei de Newton, porém modificada pelo termo $\frac{dm}{dt}\vec{u}$, conhecido por força de empuxo (não confundir com a que aparece no princípio de Arquimedes, que veremos posteriormente ao tratar a mecânica dos fluidos). Na ausência de um agente externo, esta é a força que é exercida sobre o sistema pela porção de massa que foi adicionada ou que deixou o sistema. Passemos agora a analisar alguns exemplos em que a equação acima se aplica.

a) Correia de carga - Cai areia a uma taxa dm/dt sobre uma correia deslocando-se com velocidade constante v , como mostra a Fig. 6.5. Neste caso, a aceleração é nula e a velocidade da areia sendo adicionada relativa à correia é $-u$, pois tomamos o sentido positivo das velocidades para a direita. A força necessária para manter a correia com velocidade v é:

$$F = \frac{dm}{dt}u$$

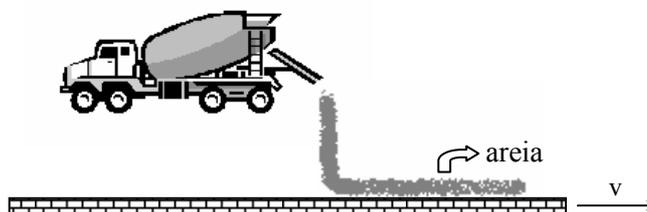


Fig. 6.5 - Correia de carga.

b) Foguete no espaço sem gravidade - Em várias situações físicas o sistema consegue um grande impulso através da ejeção de massa. Consideremos um foguete num instante de tempo t , como esquematizado na Fig. 6.6. Vamos supor que o foguete esteja no espaço sem gravidade. Entre t e $t + \Delta t$, uma quantidade Δm de massa será expelida do foguete com uma velocidade \vec{u}

(relativa ao foguete). Aplicando a 2ª lei de Newton modificada pela força de empuxo temos:

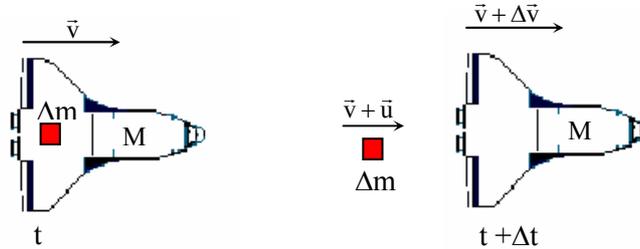


Fig. 6.6 - Foguete no espaço sem gravidade.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} + \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

onde $\vec{F} = \vec{0}$, $d\vec{v}/dt$ é a aceleração do foguete com relação a um referencial em repouso e \vec{u} é a velocidade da massa expelida com relação ao foguete. Tomando o sentido positivo das velocidades para a direita vemos que \vec{u} é negativo, mas como o foguete perde massa, dm/dt também é negativo. Assim, a aceleração é dirigida para a direita. A equação de movimento pode ser integrada resultando em:

$$\begin{aligned} d\vec{v} &= \vec{u} \frac{dm}{m} \Rightarrow \int_{v_0}^v d\vec{v} = \vec{u} \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} \\ \Rightarrow \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{u} \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) \end{aligned}$$

sendo m_0 a massa inicial do foguete. Se o foguete tem uma carcaça que pesa M , carrega uma quantidade de combustível ΔM e parte do repouso, a velocidade final será:

$$\vec{v} = 0 + \vec{u} \ln\left(\frac{M_f}{M_i}\right) = -\vec{u} \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

onde $M_i = M + \Delta M$ e $M_f = M$. Como o sentido de \vec{u} é oposto ao de \vec{v} temos:

$$v = u \ln\left(1 + \frac{\Delta M}{M}\right)$$

c) Foguete no campo gravitacional - Esta situação está mostrada na Fig. 6.7.

Neste caso, $\vec{F} = M\vec{g}$ e portanto,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{u} \frac{dm}{dt}$$

$$\vec{g} = -g\hat{y}, \quad \vec{v} = v\hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{u} = -u\hat{y}$$

$$-mg = m \frac{dv}{dt} + u \frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\left(g + \frac{u}{m} \frac{dm}{dt}\right)$$

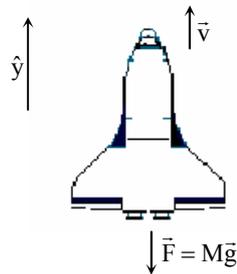


Fig. 6.7 - Foguete no campo gravitacional.

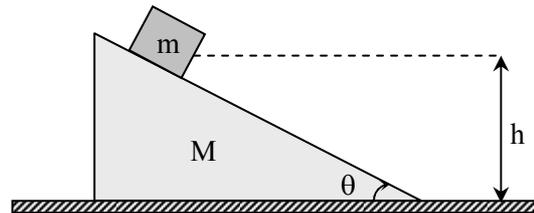
Tomando $v_0 = 0$ e massa inicial m_0 ,

$$\int_0^v dv = -\int_0^t g dt - u \int_{m_0}^m \frac{dm}{m}$$

$$\Rightarrow v = u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - gt$$

Exercícios

- 1 - Um bloco de massa m repousa sobre uma cunha de massa M e ângulo θ , que por vez está colocada sobre uma superfície horizontal, como mostrado na Fig. 6.8. Soltando sistema a partir do repouso, com o corpo a uma altura h , determine a velocidade da cunha quando o bloco tocar o solo. Todas as superfícies são isentas de atrito.

**Fig. 6.8**

- 2 - Um corpo de massa $M = 400$ g é solto do repouso de uma altura $h = 10$ m com relação à superfície da Terra. Simultaneamente, uma bala de massa $m = 100$ g é disparada verticalmente da superfície com velocidade $v_0 = 10$ m/s. Sabendo-se que em algum lugar da trajetória as massas colidem e se unem, pergunta-se qual o tempo que as massas demoram para cair desde o instante em que M é solta.
- 3 - Um vagão de carga aberto pesa 10 ton. e está deslizando num trilho sem atrito com velocidade de 60 cm/s. Inicia-se repentinamente uma forte chuva e as gotas caem verticalmente com v_0 em relação ao chão. Qual é a velocidade do vagão após coletar 500 Kg de água?
- 4 - Sobre o prato de uma balança é colocada uma ampulheta. No instante inicial ($t = 0$) toda a areia está em repouso na parte superior da ampulheta. Sendo que a areia cai para o recipiente inferior a uma taxa $\lambda = dm/dt$, faça um gráfico mostrando a leitura na balança para $t \geq 0$.

- 5 - Um jato de água com velocidade v_0 e fluxo $\phi = dm/dt$ é dirigido para cima conforme mostra a Fig. 6.9. Uma lata com a boca para baixo é sustentada pelo jato. Se a massa da lata é M , a que altura ela ficará?
- 6 - Uma gota de chuva de massa inicial M_0 começa a cair a partir do repouso. Supondo que a gota ganhe massa ao passar pelas nuvens a uma taxa proporcional ao produto da massa pela velocidade ($dm/dt = KMv$), calcule a velocidade $v(t)$. Despreze a resistência do ar.

Nota:
$$\int \frac{dx}{1-ax^2} = \frac{\text{arctgh}(\sqrt{a}x)}{\sqrt{a}}$$

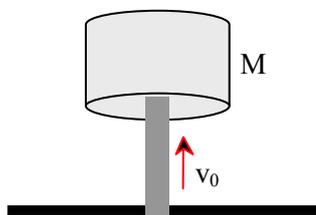


Fig. 6.9

- 7 - Um foguete de brinquedo tem uma carcaça que pesa 100 g e uma quantidade inicial de combustível de 400 g. A velocidade relativa ao foguete com que o combustível sai é 100 m/s e a taxa com que ele é queimado é de 100 g/s. Supondo que ele decole da superfície da Terra ($g = 10 \text{ m/s}^2$ constante), com velocidade inicial nula, que velocidade máxima ele atingirá?
- 8 - Calcule a potência necessária para levantar verticalmente uma corda inicialmente enrolada no solo, com velocidade constante v_0 . A densidade linear de massa da corda é λ e no início ela está completamente enrolada.
- 9 - Calcule as coordenadas (X_{CM}, Y_{CM}) do centro de massa de um pedaço de anel delgado (arco) de raio R e ângulo 2α , como mostra a Fig. 6.10.
- 10 - Um carrinho motorizado, de massa m , encontra-se sobre uma prancha de madeira de massa M , que por sua vez encontra-se sobre o chão extremamente liso (sem atrito), conforme mostra a Fig. 6.11. O carrinho

começa a andar com aceleração a relativa à prancha. a) Encontre a distância que a prancha percorre após decorrido um intervalo de tempo τ . b) Qual é a energia cinética relativa ao centro de massa depois de decorrido este tempo?

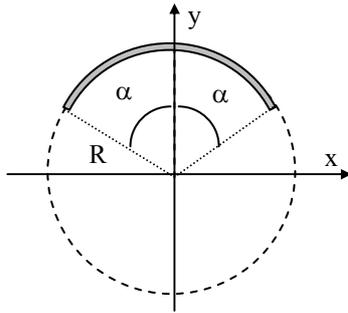


Fig. 6.10

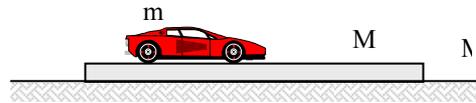


Fig. 6.11

Colisões 7

7.1 Impulso

Colisão pode ser definida como sendo a interação momentânea entre dois corpos. Durante o intervalo de tempo em que ocorre a colisão, as forças entre os corpos alteram-se sensivelmente. As leis de conservação em Física auxiliam consideravelmente o estudo das colisões.

Vamos começar considerando a lei trabalho-energia que vimos no Cap. 5. Uma força F agindo sobre um corpo de massa m ao longo de um pequeno deslocamento Δx realiza um trabalho:

$$F\Delta x = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{m}{2}(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)$$

No caso do deslocamento ser infinitesimal, $v_1 \approx v_2 = v$ e $v_2 - v_1 = \Delta v$ e assim,

$$F\Delta x = mv \Delta v$$

dividindo por Δt e tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$

$$Fv = mv \frac{dv}{dt}$$

de onde obtemos a 2ª lei de Newton para massa constante,

$$F = m \frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dt}$$

Se a força age sobre o corpo durante um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, podemos integrar a expressão acima e obter:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

onde já fizemos uma generalização para o caso tridimensional. A grandeza \vec{I} é o impulso causado pela força \vec{F} sobre o corpo durante o intervalo de tempo Δt . Dizemos então que o impulso causado pela força F é igual à variação de momentum do corpo.

Durante as colisões, as forças existentes em geral agem durante intervalos de tempo bem curtos e a representação gráfica para este tipo de força está mostrada na Fig. 7.1. Do que discutimos anteriormente, a variação da quantidade de movimento é exatamente a área sob a curva. Muitas vezes é interessante definir a força média que age sobre o corpo:

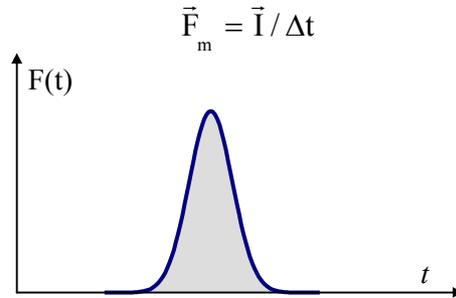


Fig. 7.1 - Exemplo de variação da força com o tempo.

Como exemplo, podemos calcular a força média exercida pelas bolas disparadas por uma metralhadora contra um alvo. Se a metralhadora dispara R balas por segundo, a força real exercida sobre o alvo é algo do tipo mostrado na Fig. 7.2.

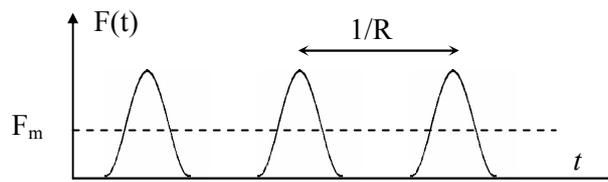


Fig. 7.2 - Sequência de impactos produzida pelas balas de uma metralhadora.

Desta forma, durante o tempo $1/R$, um momentum mv é transferido ao alvo, ou seja:

$$F_m \cdot \frac{1}{R} = mv$$

$$F_m = Rmv$$

Para $R \sim 4/s$, $m = 0,05 \text{ Kg}$ e $v = 100 \text{ m/s}$, temos $F_m = 20 \text{ N}$.

7.2 Transporte de momentum para uma superfície. Pressão de um gás

Queremos encontrar a força exercida por um feixe de partículas de velocidade v e espaçamento ℓ sobre uma superfície. Após a colisão as partículas deixam a superfície com velocidade v' , como indica a Fig. 7.3.

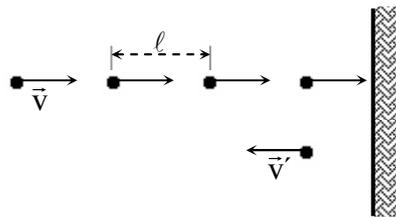


Fig. 7.3 - Colisões de partículas com uma parede.

Durante um tempo $\tau = \ell/v$ (tempo de chegada), o momentum transferido para a superfície é $m(v + v')$ e conseqüentemente a força média é dada por:

$$F_m = \frac{m(v + v')}{\ell/v} = \frac{mv(v + v')}{\ell}$$

No caso em que $v = v'$ temos um choque perfeitamente elástico e definindo uma “densidade linear de massa” como $\lambda = m/\ell$, a força média se torna:

$$F_m = \frac{2mv^2}{\ell} = 2\lambda v^2$$

Uma das grandes aplicações da transferência de momentum para superfícies é o cálculo da pressão que um gás contido numa caixa exerce sobre as paredes da mesma. Vamos imaginar as moléculas do gás como sendo esferas rígidas de massa m . Consideremos um recipiente de volume V com N moléculas dentro, como mostra a Fig. 7.4. Supondo que o movimento das moléculas é perfeitamente isotrópico, podemos dizer que a velocidade média é a mesma nas direções x , y e z , isto é, $v_x = v_y = v_z$. Assim, num dado intervalo de tempo Δt podemos imaginar que n moléculas caminham para a superfície com velocidade v_x .

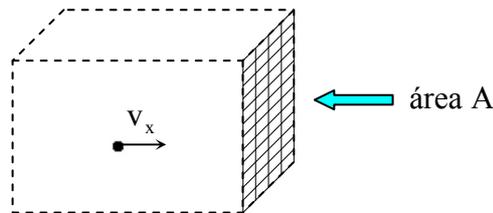


Fig. 7.4 - Pressão que um gás contido numa caixa.

O número de moléculas que atingirão a área A num intervalo de tempo Δt é:

$$n = \frac{1}{2} \rho v_x \Delta t A = \frac{1}{2} \frac{N}{V} v_x \Delta t A$$

onde o fator $\frac{1}{2}$ surge pelo fato de termos metade das moléculas caminhado para a esquerda. Supondo que a colisão com a superfície é completamente elástica, cada molécula transfere $2mv_x$ de momentum. Isto quer dizer que no tempo Δt , o impulso é dado por:

$$I = n \cdot 2mv_x = \frac{N}{V} m v_x^2 A \Delta t$$

e assim a força média agindo sobre a parede é:

$$F_m = \frac{I}{\Delta t} = \frac{N}{V} v_0^2 m A$$

A grandeza pressão é definida como força por unidade área e portanto:

$$P = \frac{F_m}{A} = \frac{N}{V} v_0^2 m$$

Existe um teorema, que veremos no futuro, chamado *teorema da equiparação de energia* que diz o seguinte: à energia contida em cada grau de liberdade do sistema está associada uma quantidade $\frac{1}{2} K_B T$, onde K_B é chamada constante de Boltzmann e T é a temperatura em graus Kelvin. Por grau de liberdade queremos nos referir à. translação, rotação ou vibração de molécula. Como a molécula que estamos considerando é ideal, isto é, uma massa pontual sem estrutura interna, o único tipo de energia que ela pode ter é a translacional (cinética). Para o grau de liberdade x , a energia é:

$$K_x = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} K_B T$$

Portanto,

$$PV = NKT$$

que é conhecida como equação dos gases ideais.

7.3 Colisão e conservação de momentum

Vamos considerar um sistema de partículas na ausência de forças externas ($\sum \vec{F}_i^{\text{ext}} = 0$). Neste caso, existem apenas forças internas, mas já vimos no capítulo anterior que ($\sum \vec{F}_i^{\text{int}} = 0$), já que os pares ação-reação cancelam-se mutuamente. Portanto, como a força total é nula, o impulso também o é e, conseqüentemente, o momentum total do sistema é conservado.

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_{1i} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_{2i}$$

Por outro lado, se olharmos para o centro de massa, veremos que sua velocidade é constante, pois a força externa é nula. Com relação à energia cinética do sistema, podemos separá-la em duas partes distintas:

$$K = \frac{1}{2}MV_{\text{CM}}^2 + K_r$$

onde M é a massa total do sistema. O 1º termo, que permanece constante para qualquer tipo de colisão é a energia cinética do centro de massa. O 2º termo K_r corresponde à energia dos componentes do sistema com relação ao centro de massa. De acordo com a variação de K_r a colisão pode ser classificada como: colisão perfeitamente elástica - K_r não se altera; e colisão perfeitamente inelástica (plástica) - K_r é completamente dissipada. A maioria das colisões está entre estes dois extremos.

a) Colisão perfeitamente elástica

Neste tipo de colisão, tanto o momentum como a energia cinética são conservados. Vamos considerar um sistema de dois corpos antes e depois da colisão como mostra a Fig. 7.5

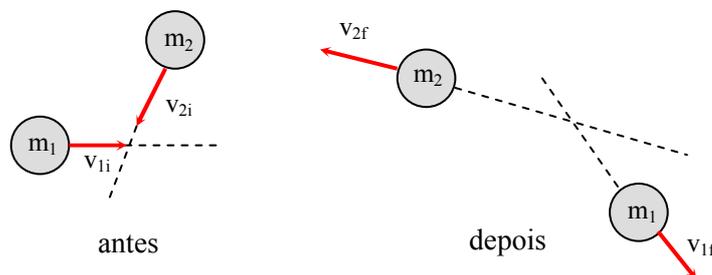


Fig. 7.5 - Colisão perfeitamente elástica.

Pelas leis de conservação de momentum e energia as equações para o problema são:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

que podem ser resolvidas fornecendo os valores de \vec{v}_{1f} e \vec{v}_{2f} . Como exemplo, vamos considerar o caso da colisão de dois corpos em uma dimensão, tendo um deles velocidade inicial nula, conforme indicado na Fig. 7.6.

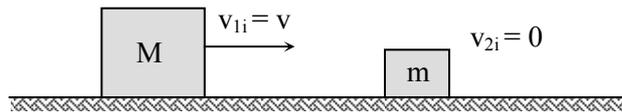


Fig. 7.6 - Colisão unidimensional elástica com corpo inicialmente em repouso.

Queremos encontrar v_{1f} e v_{2f} após a colisão. Usando as equações vistas anteriormente,

$$Mv = Mv_{1f} + mv_{2f}$$

Eliminando v_{2f} da equação de conservação de energia e substituindo na de conservação de *momentum*, obtemos uma equação de 2ª grau cuja solução é:

$$v_{1f} = \frac{\frac{M}{m}v \pm v}{1 + \frac{M}{m}} \quad v_{2f} = \frac{M}{m} \frac{(v \mp v)}{1 + \frac{M}{m}}$$

O sinal + em v_{1f} e - em v_{2f} fornece $v_{1f} = v$ e $v_{2f} = 0$ que é a condição inicial do problema, sempre contida na solução pois satisfaz conservação de momentum e energia. A solução que nos interessa é aquela que ocorre após a colisão, que é dada por:

$$v_{1f} = \frac{\left(\frac{M}{m} - 1\right)}{1 + \frac{M}{m}} v$$

$$v_{2f} = \frac{2\frac{M}{m}}{1 + \frac{M}{m}} v$$

A primeira observação que podemos fazer é que:

$$v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i})$$

isto é, “a velocidade relativa de um corpo em relação ao outro é apenas invertida na colisão”. Este é um resultado sempre válido em *colisões elásticas unidimensionais*.

A seguir vamos analisar alguns casos particulares de colisões elásticas em uma dimensão:

M = m) Neste caso, $v_{2f} = v$ e $v_{1f} = 0$ de forma que existe uma troca de velocidades.

M/m >>1) $v_{1f} \cong v$ e $v_{2f} \cong 2v$, existindo um grande impulso na massa menor.

M/m <<1) $v_{1f} \cong -v$ e $v_{2f} \cong 0$, ocorrendo somente uma reflexão do corpo mais leve.

b) Colisões perfeitamente inelásticas

Neste caso a energia cinética não é conservada embora o momentum o seja. Como exemplo, vamos considerar o tipo de colisão os corpos ficam unidos após o choque, como mostrado na Fig. 7.7.



Fig. 7.7 - Colisão perfeitamente inelástica.

Usando a conservação de momentum,

$$M_1 v_{1i} + M_2 v_{2i} = (M_1 + M_2) v_f \Rightarrow v_f = \frac{M_1 v_{1i} + M_2 v_{2i}}{M_1 + M_2}$$

que é justamente a velocidade do centro de massa do sistema. Vamos a seguir calcular a quantidade de energia dissipada na colisão. Calculando as energias antes e depois da colisão temos:

$$K_i = \frac{1}{2} M_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} M_2 v_{2i}^2$$

$$K_f = \frac{1}{2} \frac{(M_1 v_{1i} + M_2 v_{2i})^2}{M_1 + M_2}$$

$$\Delta K = K_f - K_i = -\frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_{1i} - v_{2i})^2$$

que é sempre negativo, mostrando haver perda de energia. Para o caso em que $v_{2i} = 0$ temos

$$\frac{\Delta K}{K_i} = -\frac{M_2}{M_1 + M_2}$$

que é um resultado importante para estimarmos perda de energia em experimentos com pêndulo balístico.

Exercícios

- 1 - Dois carrinhos com massas m_1 e m_2 e velocidades v_1 e v_2 chocam-se elasticamente (a energia se conserva). Sabendo-se que o momentum do sistema se conserva durante a colisão, calcule as velocidades dos carros após o choque.
- 2 - Duas bolas A e B de massas diferentes colidem. A está inicialmente em repouso e B tem velocidade v . Depois do choque B tem velocidade $v/2$ e se move perpendicular à direção do movimento inicial. Determine a direção do movimento de A após a colisão. Qual é a variação da energia devido à colisão?
- 3 - Considere o pêndulo balístico mostrado na Fig. 7.8. A massa m tem velocidade inicial v e se une à massa M após a colisão. Determine o ângulo máximo atingido pelo pêndulo.

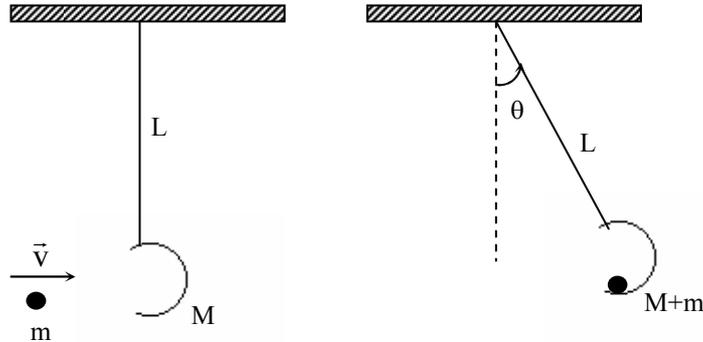


Fig. 7.8 - Pêndulo balístico.

- 4 - Uma bala de massa m é disparada com velocidade v contra um pêndulo balístico de massa M . A bala atravessa o pêndulo e emerge com velocidade $(\frac{1}{4})v$. (a) calcular a altura máxima de elevação do pêndulo, (b) calcular a energia dissipada quando a bala atravessa o pêndulo.
- 5 - Duas partículas, de massas m e M , deslizam sem atrito ao longo do eixo x com velocidades iniciais v_0 e V , e colidem. (a) qual é a velocidade do centro de massa? (b) qual é o momentum final de cada partícula no referencial do centro de massa? (c) qual é a velocidade de cada partícula no referencial do laboratório?
- 6 - Lança-se um corpo de massa $m=0,2$ kg com velocidade $v_a=12$ m/s sobre um carrinho de massa $M=1,8$ kg, que tem velocidade $V=2$ m/s. Sabendo-se que existe atrito entre o corpo e o carro, mas não entre o carro e a pista pergunta-se: a) qual a velocidade final do corpo e do carro? b) qual é a energia dissipada pelo atrito?
- 7 - Um bloco de massa $3m$ repousa sobre uma mesa sem atrito, preso à parede por uma mola de constante k . Uma bala de massa m é disparada horizontalmente contra o bloco, como mostra a Fig. 7.9 e engasta nele. Observa-se que a máxima deformação da mola é x . Encontre: (a) a

velocidade inicial da bala, (b) o impulso transferido pela bala ao bloco, (c) a fração de energia $-\Delta E/E_i$ perdida na colisão.

- 8 - Uma partícula com velocidade inicial v_0 colide com uma outra em repouso e é desviada de um ângulo ϕ . A sua velocidade, depois da colisão é v . A segunda partícula recua e a direção de seu movimento faz um ângulo θ com a direção inicial do movimento da primeira., como mostra a Fig.

7.10. Mostrar que: $\tan \theta = \frac{v \sin \phi}{v_0 - v \cos \phi}$. Para obter este resultado, é

necessário admitir que a colisão é elástica ou inelástica?

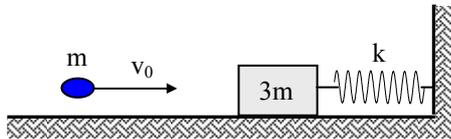


Fig. 7.9

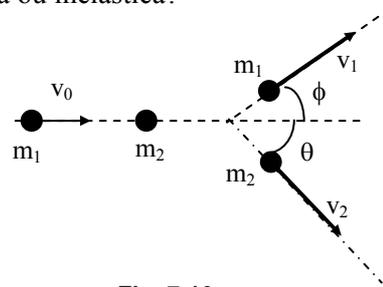


Fig. 7.10

- 9 - Um homem de massa m está sobre um carrinho de massa M , que rola num terreno plano sem atrito, com velocidade v_0 . Num certo instante ele pula para o chão com velocidade $v_0/2$ em relação ao solo e na direção oposta ao movimento do carro. (a) qual é a velocidade do centro de massa do sistema antes e depois do pulo? (b) qual é a velocidade do carrinho depois do pulo? (c) transforme todas as velocidades para o referencial do centro de massa e indique num diagrama as velocidades iniciais e finais do homem e do carro neste referencial. (d) que energia o homem dissipou no pulo? (e) qual é a velocidade do centro de massa depois que o homem atinge o chão e fica parado?

- 10 - Uma mola de massa desprezível e constante k está comprimida de uma quantia x entre dois corpos de massa m_1 e m_2 . A mola não está presa aos corpos, mas sua compressão é mantida inicialmente por um barbante sem massa, conforme mostra a Fig. 7.11. O sistema todo está se movendo

sobre uma mesa sem atrito, com velocidade V_{CM} . Subitamente o barbante se rompe. Calcule as velocidades finais v_1 e v_2 das massas.

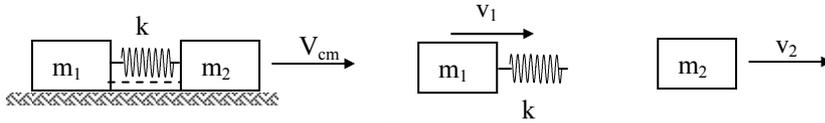


Fig. 7.11

- 11 - Dois corpos de massas m_1 e m_2 caminham para a direita com velocidades v_1 e v_2 , tal que $v_1 > v_2$, conforme mostra a Fig. 7.12. O corpo 1 possui uma mola de constante de mola k , que é comprimida durante a colisão. Qual será a máxima deformação da mola?



Fig. 7.12

DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO 8

8.1 Introdução

Um corpo rígido constitui-se de um conjunto de partículas (massas pontuais) dispostas de tal forma que as distâncias relativas entre elas são fixas. As leis da mecânica do ponto continuam válidas se considerarmos somente o movimento do centro de massa do corpo rígido. Além deste movimento translacional descrito pelas leis de Newton, o corpo também pode sofrer uma rotação ao redor de um eixo, que pode eventualmente passar pelo seu centro de massa. Assim, para especificarmos com exatidão a posição de um corpo rígido, é necessário conhecermos o movimento de seu centro de massa e o ângulo de rotação θ , como mostra a Fig. 8.1.

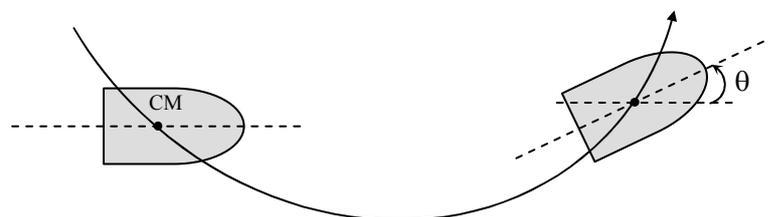


Fig. 8.1 – Movimento de um corpo rígido combinando translação e rotação.

8.2 Rotação em torno de um eixo fixo

Vamos rever algumas grandezas físicas necessárias para descrever a rotação de um corpo rígido ao redor de um eixo fixo. Consideremos um ponto localizado a uma distância r do eixo de rotação de tal maneira que seu vetor

posição forma um ângulo θ com a linha tracejada horizontal, conforme mostra a Fig. 8.2.

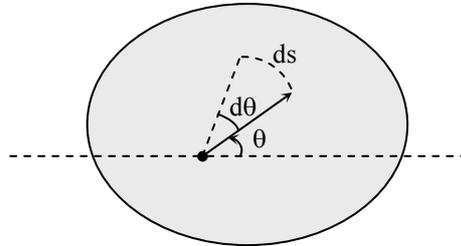


Fig. 8.2 – Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo.

A velocidade angular do corpo é definida como sendo a variação temporal do ângulo θ :

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad [\text{rad/s}]$$

Durante um intervalo de tempo dt , o ponto descreve um arco $ds = r d\theta = r \omega dt$, onde na última igualdade usamos a definição de ω dada acima. A velocidade tangencial corresponde à variação de ds com o tempo e assim,

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = r \omega(t) \quad [\text{m/s}]$$

Como deixamos explícito acima, $\omega(t)$ pode depender do tempo e sua variação define a aceleração angular α :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad [\text{rad/s}^2]$$

Evidentemente, neste caso temos também aceleração tangencial e como r é constante durante a rotação (corpo rígido), ela é definida como:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha \quad [\text{m/s}^2]$$

Devemos nos lembrar que como este ponto descreve um círculo, também sofre a aceleração centrípeta dada por:

$$\mathbf{a}_c = -\frac{v^2}{r} = -\omega^2 \mathbf{r}$$

O conjunto de equações acima tem uma forma similar ao encontrado no caso do movimento retilíneo se substituirmos θ , ω e α por x , v e a . No caso em que α é constante (rotação uniformemente acelerada) obtemos por integração direta que:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

As grandezas θ , ω e α que caracterizam o movimento rotacional também podem ser representadas vetorialmente. A *direção* neste caso é a do eixo em torno do qual o corpo roda. O *sentido* é definido pela regra da mão direita, colocando-se os dedos na direção em que θ aumenta. O polegar coincide então com o eixo de rotação e indica o sentido do vetor $\vec{\theta}$. Estritamente falando, $\vec{\theta}$ só pode ser considerado vetor quando o eixo de rotação não muda ou quando $|\vec{\theta}| \rightarrow 0$. Caso contrário, ele não obedece a regra de comutação dada por:

$$\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 \neq \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$$

Como exemplo, consideremos duas rotações consecutivas de um paralelepípedo, ambas de 90° , conforme mostra a Fig. 8.3. Se a 1ª rotação se der em torno de x e a 2ª em torno de y , a posição final do corpo será diferente daquela obtida se a ordem das rotações forem invertidas. Isto demonstra a não comutatividade de $\vec{\theta}$. Por outro lado, $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$ comutam porque envolvem vetores infinitesimais ($\vec{\omega} = d\vec{\theta}/dt$ e $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$).

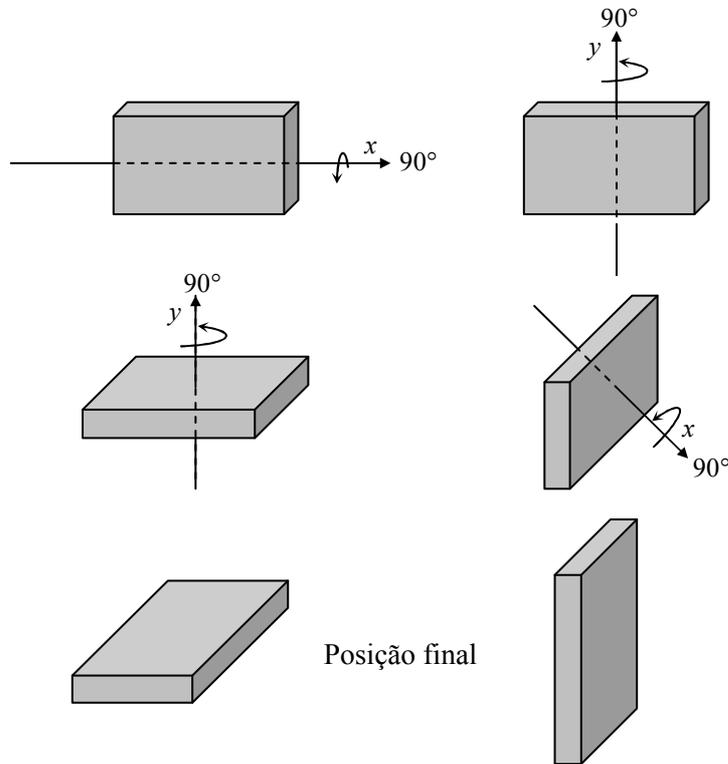


Fig. 8.3 – Não comutatividade da rotação de um corpo rígido para eixo não fixo.

8.3 Energia rotacional e momento de inércia

Se imaginarmos um corpo rígido rodando em torno de um eixo fixo, dividido num número muito grande de partes, cada uma com massa Δm_i , veremos que a energia cinética de cada uma destas partes é:

$$K_i = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

pois sabemos que a velocidade tangencial é $v_i = r_i \omega$ e que a velocidade angular ω é a mesma para todos os elementos de massa Δm_i . A energia cinética total do corpo rígido pode ser encontrada somando-se as energias individuais de cada componente do sistema:

$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

O termo entre parênteses é conhecido como *momento de inércia*, denotado por I . A energia cinética de rotação de um corpo rígido pode então ser escrita como:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

com $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$. A definição do momento de inércia dada acima é válida

no caso em que o corpo é composto por partículas discretas. Se tivermos uma distribuição contínua de massa devemos fazer $\Delta m_i \rightarrow dm$ e transformar a soma em integral:

$$I = \int_V r^2 dm$$

Comparando a energia cinética de rotação com a de translação, vemos que o momento de inércia faz o papel da massa inercial e a velocidade angular faz o papel da velocidade tangencial.

O momento de inércia depende fortemente da distribuição de massa com relação a um eixo específico, em torno do qual o corpo roda. Desta forma, um mesmo corpo rígido pode ter vários momentos de inércia que dependem dos eixos de rotação escolhidos. Para uma dada velocidade angular ω , como o momento de inércia depende do eixo de rotação, a energia cinética também dependerá. Como exemplo, vamos considerar três massas pontuais (portanto, discretas), ligadas por hastes rígidas sem massa, de maneira a formar o triângulo equilátero mostrado na Fig. 8.4. O momento de inércia em relação ao eixo (1) mostrado na Fig. 8.4 é dado por:

$$I_1 = \sum m_i r_i^2 = 2m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} mL^2$$

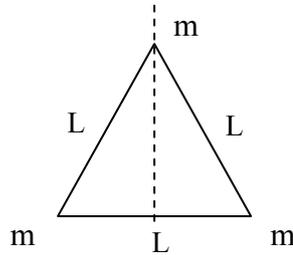


Fig. 8.4 – Corpo rígido formado por um triângulo equilátero com massas no vértice.

Queremos, a seguir, calcular o momento de inércia com relação a um eixo perpendicular ao plano da figura e passando pelo centro de massa do triângulo. A distância de cada massa a este eixo é de $d = L/\sqrt{3}$, de forma que teremos:

$$I_{CM} = 3md^2 = mL^2$$

Por sua vez, o momento de inércia em relação a um eixo perpendicular ao plano da figura e passando por uma das massas é:

$$I_2 = 2mL^2$$

O momento de inércia apresenta uma série de propriedades interessantes que muitas vezes simplificam a realização dos cálculos. Veremos estas propriedades a seguir.

Teorema dos eixos paralelos (Teorema de Steiner)

Se conhecermos o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo passando pelo centro de massa, podemos facilmente encontrar o momento de inércia em relação a um eixo paralelo a ele, como mostra a Fig. 8.5. O momento de inércia em relação ao eixo passando pelo centro de massa é:

$$I_{CM} = \int r^2 dm$$

enquanto que em relação ao eixo paralelo,

$$I = \int r'^2 dm$$

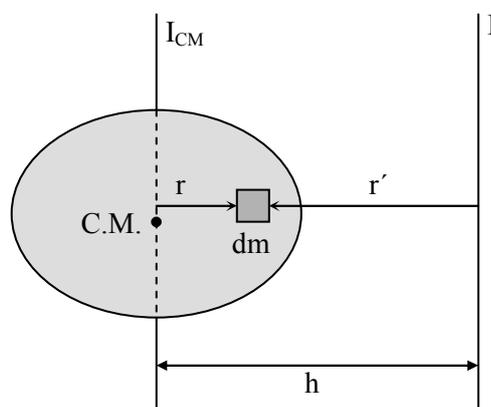


Fig. 8.5 – Figura usada para a demonstração do teorema dos eixos paralelos.

Entretanto, como $r' = h - r$ podemos escrever:

$$I = \int (h - r)^2 dm = \int r^2 dm + h^2 \int dm - 2h \int r dm$$

O último termo nos dá a distância do C.M. ao eixo passando pelo C.M. que, obviamente, é nula. Logo,

$$I = I_{CM} + Mh^2$$

No exemplo das três massas formando o triângulo equilátero visto anteriormente na Fig. 8.4, encontramos: $I_{CM} = mL^2$. Tomando um eixo paralelo que passa por uma das massas temos $h = L/\sqrt{3}$ e $M = 3m$. Pelo teorema de Steiner encontramos:

$$I_2 = I_{CM} + Mh^2 = mL^2 + 3m \frac{L^2}{3} = 2mL^2$$

que coincide com o resultado obtido anteriormente.

Teorema dos eixos perpendiculares

Este teorema é válido para corpos planos, do tipo placa, mostrado na Fig. 8.6.

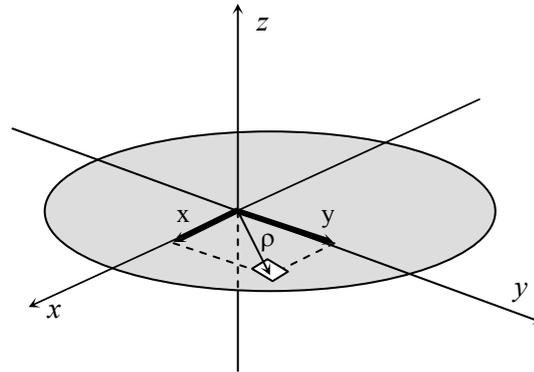


Fig. 8.6 – Figura usada para a demonstração do teorema dos eixos perpendiculares.

Os momentos de inércia com relação aos eixos x , y e z são dados por:

$$I_x = \int y^2 dm$$

$$I_y = \int x^2 dm$$

$$I_z = \int \rho^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$

Portanto, $I_z = I_x + I_y$, isto é, a soma dos momentos de inércia de dois eixos perpendiculares contidos no plano do corpo é igual ao momento de inércia em relação a um 3º eixo perpendicular ao plano do corpo e passando pela interseção dos dois primeiros. Quando este 3º eixo passa pelo centro de massa é denominado de eixo polar.

Vamos a seguir considerar alguns exemplos de cálculo de momento de inércia.

a) Massa pontual – Este caso, mostrado na Fig. 8.7, é o mais simples e leva a um momento de inércia dado por: $I = md^2$. Onde d é a distância da massa ao eixo.

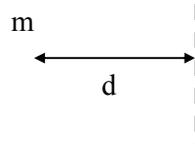


Fig. 8.7 – Massa pontual rodando em torno de um eixo.

b) Arco de raio R - O cálculo do momento de inércia de um anel de raio R em relação a um eixo passando pelo centro de massa e perpendicular ao plano do anel (eixo polar) também é bastante simples porque cada elemento de massa dm está à mesma distância $r = R = \text{constante}$ do eixo de rotação, conforme indicado na Fig. 8.8. Portanto,

$$I = \int r^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

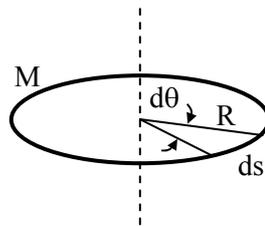


Fig. 8.8 – Anel rodando em torno do eixo polar.

c) Barra delgada de comprimento L - A barra mostrada na Fig. 8.9 roda em torno de um eixo perpendicular passando pelo centro de massa. A densidade linear de massa é $\lambda = M/L$, de forma que o elemento infinitesimal possui $dm = \lambda dx = (M/L) dx$. Como $-L/2 \leq x \leq L/2$, temos:

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \left(\frac{M}{L} \right) dx = \left(\frac{M}{L} \right) \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{ML^2}{12}$$

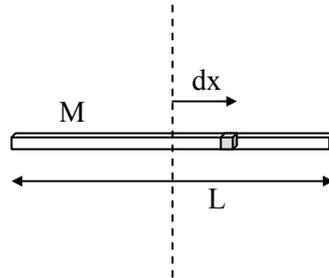


Fig. 8.9 – Barra delgada rodando em torno do centro de massa.

d) Barra delgada com eixo passando pela extremidade – Conforme indicado na Fig. 8.10, a única diferença do caso anterior é o intervalo de variação de x , que agora é: $0 \leq x \leq L$. Desta forma, a integral fica:

$$I = \int_0^L x^2 \left(\frac{M}{L}\right) dx = \left(\frac{M}{L}\right) \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{ML^2}{3} = I_{\text{CM}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

onde nesta última passagem utilizamos o teorema dos eixos paralelos.

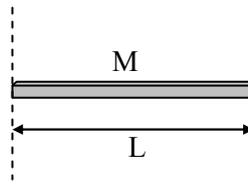


Fig. 8.10 - Barra delgada rodando em torno da ponta.

e) Anel de raio r com eixo no plano do anel - A densidade linear de massa para o anel é $\lambda = M/2\pi R$, de forma que o elemento de massa mostrado na Fig. 8.11 possui $dm = \lambda R d\theta = (M/2\pi)d\theta$. Sua distância ao eixo y é dada por: $x = R \sin \theta$ e, portanto,

$$I_y = \int_0^{2\pi} \frac{M}{2\pi} R^2 \sin^2 \theta d\theta = \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos 2\theta)}{2} d\theta$$

$$\Rightarrow I_y = \frac{MR^2}{2} = I_x$$

pela própria simetria do problema. Por outro lado, vemos que $I_x + I_y = MR^2 =$

I_z como era de se esperar pelo teorema dos eixos perpendiculares.

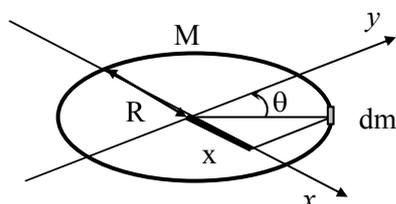


Fig. 8.11 – Anel rodando em torno de um eixo contido no seu plano.

f) Disco de raio R - A densidade superficial de massa de um disco de raio R é $\sigma = M/\pi R^2$. Conforme vemos na Fig. 8.12, um disco pode ser considerado como composto de um grande número de anéis concêntricos, de raio r e espessura dr. A massa elementar de cada um destes anéis é dada por: $dm = \sigma dA$, onde $dA = 2\pi r dr$.

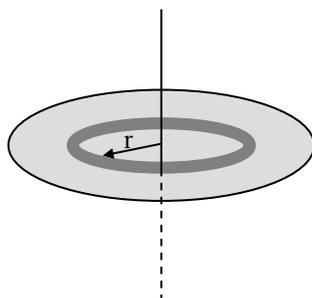


Fig. 8.12 – Disco rodando em torno do eixo polar.

O momento de inércia polar do anel é $dI_z = dm r^2$. Para calcularmos o momento de inércia do disco devemos somar as contribuições de todos os anéis concêntricos compreendidos entre 0 e r. Assim,

$$I_z = \int_0^R r^2 \left(\frac{M}{\pi R^2} \right) 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2}$$

Pelo teorema dos eixos perpendiculares,

$$I_z = I_y = \frac{1}{2} I_x = \frac{MR^2}{4}$$

g) Cilindro maciço de raio R - A densidade volumétrica de massa para um cilindro de raio R e altura H é dada por: $\rho = M/V = M/\pi R^2 H$. Por outro lado, um cilindro pode ser encarado como se fosse uma pilha de inúmeros discos finos de raio R e altura dz, como visto na Fig. 8.13. A massa de cada disco é $dm = \rho \pi R^2 dz = M dz/H$. O momento de inércia polar de cada disco elementar é $dI_z = \frac{1}{2} dm r^2$, como calculado no ítem anterior. Ao se somar as contribuições de todos os discos fazemos uma integral onde z varia de 0 a H. Assim,

$$I = \frac{1}{2} \int R^2 dm = \frac{1}{2} \frac{MR^2}{H} \int_0^H dz = \frac{1}{2} MR^2$$

Neste caso não podemos usar o teorema dos eixos perpendiculares para encontrar I_z ou I_y , pois o corpo não é plano.

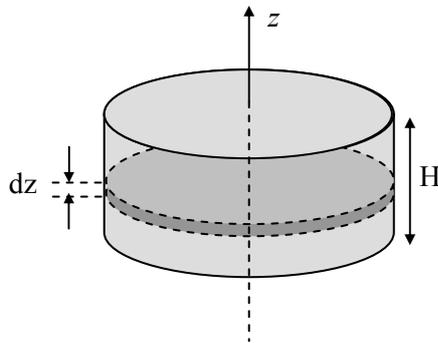


Fig. 8.13 – Cilindro maciço rodando em torno do eixo de simetria.

8.4 Dinâmica da rotação em torno de um eixo fixo

Da mesma forma que a translação, a rotação é causada por um agente externo produzindo uma força. Consideremos um corpo rígido rodando com velocidade angular ω em torno de um eixo fixo O, conforme mostra a Fig. 8.14. Existe uma força \vec{F} aplicada a uma distância \vec{r} do eixo. Queremos encontrar o trabalho realizado por esta força.

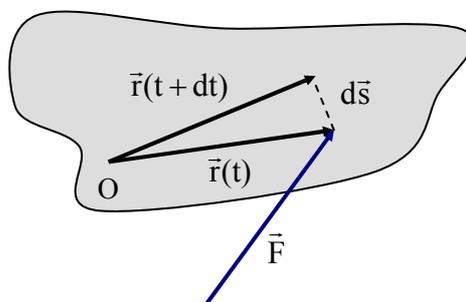


Fig. 8.14 - Trabalho realizado por uma força durante a rotação de um corpo rígido

Durante um intervalo de tempo dt , o corpo roda a um ângulo $d\vec{\theta} = \vec{\omega}dt$, de modo que o ponto especificado pelo vetor $\vec{r}(t)$ percorrerá uma distância $d\vec{s}$ e o trabalho realizado pela força \vec{F} é dado por:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Usando a definição vetorial de $d\vec{\theta}$ e $d\vec{\omega}$, podemos escrever $d\vec{s}$ como sendo

$$d\vec{s} = d\vec{\theta} \times \vec{r} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt$$

e assim,

$$dW = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt$$

Entretanto, como $\vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$ podemos escrever a potência fornecida pela força \vec{F} como sendo:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

Para que o trabalho (ou potência) não seja nulo, \vec{F} deve ter uma componente paralela a $d\vec{s}$ e, conseqüentemente, perpendicular a \vec{r} . Comparando com o movimento translacional vemos que $\vec{\omega}$ faz o papel de \vec{v} e $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ faz o papel da força. $\vec{\tau}$ é denominado de *torque* da força \vec{F} em relação ao ponto O.

Vamos a seguir encontrar uma relação entre $\vec{\tau}$ e $\vec{\alpha}$ que seja correspondente à 2ª lei de Newton. Já vimos que $K = \frac{1}{2} I \omega^2$, portanto:

$$P = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{I \omega^2}{2} \right) = I \omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{\tau}$$

Logo,

$$\vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\alpha}$$

No caso de termos várias forças produzindo vários torques, escrevemos:

$$\sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i = I \vec{\alpha}$$

Como aplicação direta desta lei de rotação, vamos considerar o seguinte exemplo: uma corda de densidade linear de massa λ está enrolada em uma roldana de massa M e raio R , que pode rodar livremente em torno de um eixo, como mostra a Fig. 8.15. O momento de inércia da roldana é $I_0 = \frac{1}{2} MR^2$.

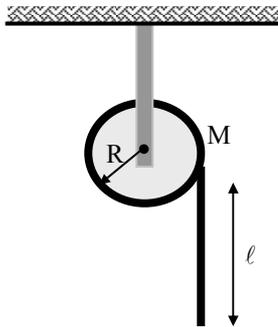


Fig. 8.15 – Corda desenrolando de uma roldana.

Se um comprimento ℓ_0 está inicialmente desenrolado e a velocidade angular inicial ω_0 é nula, qual será a aceleração e a velocidade da corda como função de ℓ ? Nesta situação, a massa pendente é $m(\ell) = \lambda \ell$ e a 2ª lei de Newton para a corda é:

$$ma = mg - T \quad \Rightarrow \quad \lambda \ell a = \lambda \ell g - T$$

O torque realizado pela corda sobre a polia é dada por: $\tau = RT$ de modo que,

$$RT = I_0 \alpha = I_0 \frac{d\omega}{dt}$$

Por outro lado, como a corda não desliza sobre a roldana podemos escrever $v = R\omega$ e $a = R\alpha$. Assim,

$$RT = I_0 \frac{a}{R} \Rightarrow T = \frac{I_0 a}{R^2} = \frac{Ma}{2}$$

Substituindo este resultado na equação para a corda obtemos:

$$a = \frac{\lambda \ell g}{\lambda \ell + \frac{M}{2}}$$

Para o cálculo da velocidade fazemos: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\ell} \frac{d\ell}{dt}$

Como $d\ell/dt = v$, temos:

$$v \frac{dv}{d\ell} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{d\ell} = \frac{\lambda \ell g}{\lambda \ell + \frac{M}{2}}$$

$$\frac{1}{2} v^2 = \int_{\ell_0}^{\ell} \frac{\lambda g \ell d\ell}{\lambda \ell + M/2} = g(\ell - \ell_0) - \frac{gM}{2\lambda} \ln \left(\frac{M/2 + \lambda \ell}{M/2 + \lambda \ell_0} \right)$$

Este resultado mostra que se $M = 0$ a corda estará em queda livre. Porém, se $M \neq 0$ parte da energia é gasta para aumentar a velocidade angular da polia.

8.5 Equilíbrio estático de um corpo rígido

Como vimos até agora, um corpo rígido pode possuir movimentos rotacional e translacional, aos quais estarão associados respectivamente um torque e uma força externa. Dizemos que um corpo está em equilíbrio quando seu movimento rotacional-translacional não se alterar no tempo ($a = \alpha = 0$). Em particular, quando há ausência de movimento ($v = \omega = 0$) dizemos que o

corpo está em *equilíbrio estático* (repouso). A condição necessária para que ocorra esta situação é:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (\text{translacional})$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \quad (\text{rotacional})$$

Vamos analisar alguns exemplos onde o equilíbrio estático se manifesta. Inicialmente, vamos considerar uma escada encostada numa parede sem atrito, como mostra a Fig. 8.16. Sabendo-se que a massa da escada é M , o comprimento é L e o atrito com o chão é μ , queremos calcular o menor ângulo θ para o qual a escada não escorrega.

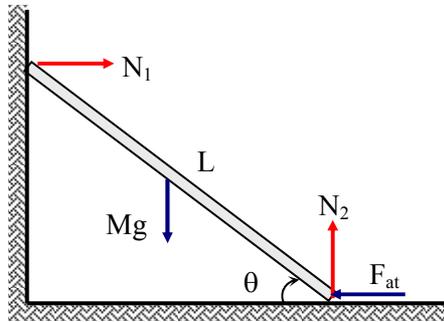


Fig. 8.16 – Escada apoiada numa parede sem atrito.

Como as forças e torques totais são nulos:

$$Mg - N_2 = 0$$

$$N_1 - F_{\text{at}} = N_1 - \mu N_2 = 0$$

$$Mg \frac{L}{2} \cos \theta - N_1 L \sin \theta = 0 \quad (\text{torque em torno de O})$$

Deste conjunto de equação encontramos uma expressão para o ângulo mínimo θ :

$$\text{tg} \theta = \frac{1}{2\mu} \quad \text{ou} \quad \theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{1}{2\mu} \right)$$

Um segundo exemplo é o de uma caixa de altura h e base L , colocada

sobre uma mesa inclinada com atrito, conforme mostra a Fig. 8.17. Se a caixa não desliza, qual é a máxima inclinação antes dela rolar?

Enquanto o torque em torno de O devido à força peso estiver apontado no sentido indo para o interior da página (horário) não haverá rotação. Quando ele inverte de sentido (anti-horário), haverá rotação. Existe uma situação em que o torque é nulo, o que define o ângulo crítico θ_c . Se este ângulo for diminuído, o torque é horário (não roda) e se for aumentado é anti-horário (roda). Esta situação crítica ocorre quando \vec{r} é paralelo a \vec{F} ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$), isto é, quando a força peso passar pelo ponto de apoio O. Nesta condição,

$$\text{tg}\theta_c = \frac{L/2}{h/2} = \frac{L}{h}$$

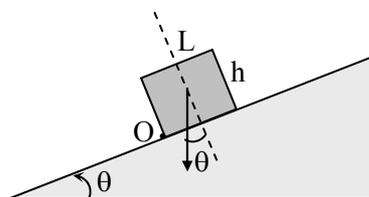


Fig. 8.17 – Caixa num plano inclinado com atrito.

8.6 Aceleração constante

Vamos nesta seção considerar o caso em que existe uma força externa agindo sobre o corpo rígido, capaz de produzir uma aceleração constante. Em geral, existe nesta situação um movimento combinado de rotação e translação. Estes movimentos podem ser analisados independentemente e posteriormente relacionados por uma equação do tipo $\alpha = a/R$ ou $\omega = v/R$.

a) Iô-iô – Considere um iô-iô de massa M e raio R (na forma de um disco como o mostrado na Fig. 8.18) que é solto a partir do repouso. Queremos encontrar $\omega(t)$ e $v(t)$.

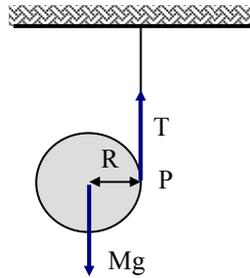


Fig. 8.18 – Iô-iô solto a partir do repouso.

As equações para forças e torque são dadas respectivamente por:

$$Mg - T = Ma$$

$$TR - I\alpha \Rightarrow T = \frac{I\alpha}{R}$$

onde $I = MR^2/2$, a é a aceleração do centro de massa do disco e o torque é calculado em relação a este ponto. Nas duas equações acima temos 3 incógnitas (T , a e α), mas uma nova equação envolvendo a e α pode ser encontrada. Se estivermos no centro de massa veremos o ponto P subindo com aceleração a e o disco rodando com aceleração angular α . Assim, é fácil notarmos que: $a = R\alpha = R d\omega/dt$, onde então,

$$Mg - \frac{I}{R} \frac{d\omega}{dt} = MR \frac{d\omega}{dt}$$

$$\left(MR + \frac{I}{R} \right) \frac{d\omega}{dt} = MR \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{d\omega}{dt} = Mg$$

Logo: $\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3} \frac{g}{R}$ de onde se obtém $\omega(t) = \frac{2}{3} \frac{gt}{R}$ e conseqüentemente

$$v(t) = R\omega(t) = \frac{2}{3} gt$$

b) Carretel – Um carretel de raio interno r e raio externo R encontra-se sobre uma mesa com atrito como indicado na Fig. 8.19. Ele é puxado por um fio que produz uma força \vec{F} fazendo um ângulo θ com a horizontal. Observa-se que

para $\theta < \theta_c$ (ângulo crítico) o carretel rola sem deslizar na direção da força \vec{F} e para $\theta > \theta_c$ ele roda no sentido oposto. Queremos encontrar o valor de θ_c . Vamos supor que o carretel ande na direção de \vec{F} . As equações para a translação do centro de massa são:

$$Mg = N + F \sin \theta$$

$$Ma = -F_{\text{at}} + F \cos \theta$$

e para o torque em torno do centro de massa:

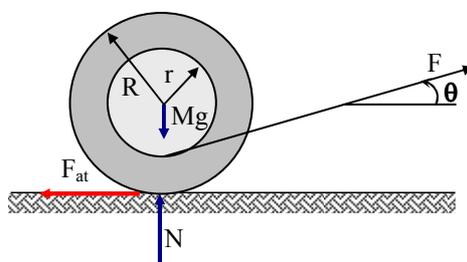


Fig. 8.19 - Carretel puxado sobre uma mesa com atrito.

$$F_{\text{at}} R - Fr = I_0 \alpha$$

onde supusemos que o carretel é acelerado para a direita. Usando $a = \alpha R$ e $I_0 = \frac{1}{2} MR^2$, temos para a equação da translação:

$$-F_{\text{at}} = Ma - F \cos \theta = MR\alpha - F \cos \theta$$

Substituindo F_{at} na equação da aceleração angular obtemos:

$$-MR^2\alpha + FR \cos \theta - Fr = I_0 \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha (I_0 + MR^2) = F(R \cos \theta - r)$$

$$\alpha = F \frac{(R \cos \theta - r)}{\frac{3}{2} MR^2}$$

Quando $\alpha > 0$ o carretel roda para a direita (sentido horário) e quando $\alpha < 0$ ele roda para a esquerda (sentido anti-horário). O ângulo crítico ocorre para $\alpha = 0$ isto é:

$$R \cos \theta_c - r = 0 \Rightarrow \theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{r}{R}\right)$$

c) Disco sobre uma mesa sem atrito – A Fig. 8.20 mostra um disco de massa M e raio R , que está deitado sobre uma massa sem atrito. Ele é puxado por um corpo de massa m através de um fio enrolado ao seu redor. Se o sistema é solto a partir do repouso, qual será a velocidade do centro do disco e a tensão na corda?

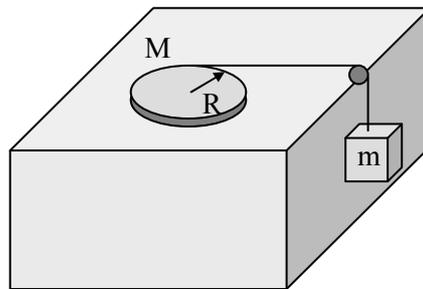


Fig. 8.20 - Disco puxado sobre uma mesa sem atrito.

A única força agindo sobre o disco é a tensão na corda. As equações para a translação e rotação do corpo são dadas respectivamente por:

$$T = Ma = M \frac{dv}{dt}$$

$$TR = I_0 \alpha = I_0 \frac{d\omega}{dt}$$

com $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$. Para o corpo de massa m temos apenas a translação, descrita pela equação:

$$mg - T = ma' = m(a + \alpha R)$$

onde levamos em conta o vínculo $a' = a + \alpha R$. Isto significa que a aceleração do corpo m se deve tanto à aceleração do centro de massa disco, como do fato da corda estar sendo desenrolada com aceleração angular α . Substituindo os valores de a e α obtidos anteriormente ficamos com:

$$mg - T = m \left(\frac{T}{M} + \frac{TR^2}{I_0} \right) = \frac{3mT}{M}$$

Desta equação podemos tirar o valor de T como:

$$mg = T \left(1 + \frac{3m}{M} \right) \Rightarrow T = \frac{mg}{1 + 3m/M}$$

e voltando para a expressão da aceleração obtemos:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{T}{M} = \frac{g}{3 + \frac{M}{m}} \Rightarrow v(t) = \frac{gt}{3 + \frac{M}{m}}$$

enquanto que para a aceleração angular,

$$\alpha = \frac{TR}{\frac{1}{2}MR^2} = \left(\frac{2mg}{MR} \right) \frac{1}{1 + 3m/M} = \frac{2g}{R} \frac{1}{3 + \frac{M}{m}}$$

$$\Rightarrow \omega(t) = \frac{2gt}{R(3 + M/m)}$$

d) Disco puxado pelo centro de massa – O disco visto na Fig. 8.21 não patina devido à existência da força de atrito. Neste caso, $a = \alpha R$ e as equações de movimento são:

$$F - F_{\text{at}} = Ma$$

$$F_{\text{at}} R = I\alpha = I a / R \Rightarrow F_{\text{at}} = \frac{I a}{R^2} = \frac{Ma}{2}$$

Logo, $F - Ma/2 = Ma$, que nos leva à aceleração: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{2}{3} \frac{F}{M}$ e à velocidade: $v(t) = \frac{2F}{3M} t$.

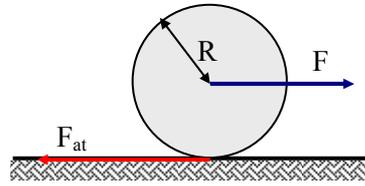


Fig. 8.21 – Disco puxado pelo centro de massa.

8.7 Momentum angular

Consideremos uma partícula descrita pelo vetor posição $\vec{r}(t)$, movendo-se no espaço com velocidade $\vec{v}(t)$, como mostra a Fig. 8.22. A 2ª lei de Newton para esta partícula é dada por:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

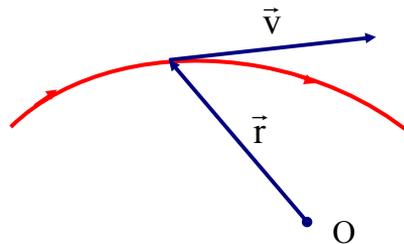


Fig. 8.22 – Movimento tridimensional de uma partícula.

Vamos multiplicar vetorialmente os dois lados desta igualdade por $\vec{r}(t)$. Desta forma teremos:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

onde $\vec{\tau}$ é o torque da força \vec{F} em relação ao ponto O. Por outro lado, se tomarmos a derivada do produto $\vec{r} \times \vec{p}$ temos:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{v} \times m\vec{v}$$

O produto vetorial $\vec{v} \times \vec{v}$ é nulo (vetores paralelos) e assim:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Logo:

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

onde $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ é definido como *momentum angular* da partícula em relação ao ponto O. Note que \vec{L} depende do ponto O considerado. Como vimos anteriormente, $\vec{\tau} = I\vec{\alpha} = I d\vec{\omega}/dt = d(I\vec{\omega})/dt$. Esta última passagem só é válida quando temos rotação em torno de um eixo fixo e neste caso I é constante. Então,

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \text{ ou } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Como dissemos, a primeira igualdade é válida quando I é constante (movimento em torno de um eixo) e é muito empregada em cálculos onde corpos extensos são envolvidos. A segunda igualdade é bastante importante quando massas pontuais são envolvidas. Um exemplo interessante é o de uma partícula movendo-se em linha reta, como mostra a Fig. 8.23. Ela apresenta momentum angular se sua trajetória não passar pela origem de \vec{r} . Vemos que:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = -rmv \sin \theta \hat{k}$$

Como $r \sin \phi = b$, temos $\vec{L} = -mbv\hat{k}$.

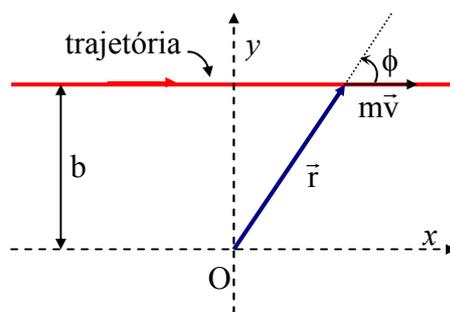


Fig. 8.23 – Movimento retilíneo de uma partícula.

8.8 Torque e momentum angular de um sistema de partículas

Consideramos um sistema composto de N partículas, cada uma movendo-se com velocidade \vec{v}_i medidas em relação a um ponto fixo O . O momentum angular total do sistema é dado por:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i$$

que por sua vez satisfaz a igualdade:

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Ao calcularmos o torque total sobre o sistema de partículas, notamos que o torque devido às forças internas é nulo. Para provarmos este fato, consideremos duas partículas constituintes do sistema mostradas na Fig. 8.24.

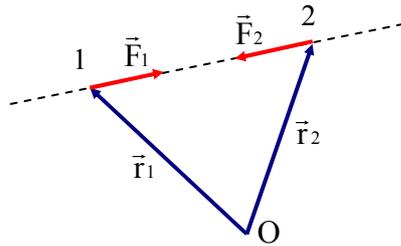


Fig. 8.24 – Torque devido às forças internas..

As forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 constituem um par ação-reação e pela 3ª lei de Newton sabemos que $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Assim, o torque devido a estas forças é dado por:

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1$$

Como $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ está na direção da linha pontilhada que une 1 a 2, seu produto vetorial com \vec{F}_1 é nulo e assim concluímos que os torques devidos às forças internas se cancelam aos pares. Portanto, a equação correta é:

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = d\vec{L} / dt$$

Como vimos anteriormente, para o caso de rotação ao redor de um eixo fixo temos $\vec{L} = I\vec{\omega}$ e, portanto:

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = I d\vec{\omega} / dt$$

Como um primeiro exemplo, vamos calcular o momentum angular para um disco girando ao redor de seu eixo de simetria como mostrado na Fig. 8.25. Tomando a i -ésima massa m_i do disco, temos:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i r_i v_i \hat{k}$$

Como $v_i = r_i \omega$, segue que:

$$\vec{L}_i = m_i r_i (r_i \omega) \hat{k} = (m_i r_i^2) \omega \hat{k}$$

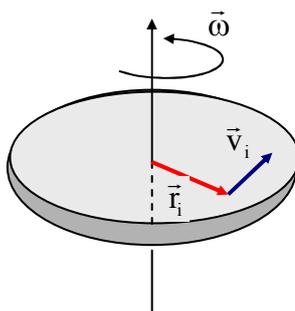


Fig. 8.25 – Rotação de um disco em torno de seu eixo polar.

e assim, o momentum angular total é dado por:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i (m_i r_i^2) \omega \hat{k} = I \omega \hat{k} = I \vec{\omega}$$

onde, de acordo com a definição anterior $I = \sum_i m_i r_i^2$.

No caso que acabamos de ver, o eixo de rotação passa pelo centro de massa. Caso ele esteja deslocado de uma distância R do centro de massa,

como mostra a Fig. 8.26, o momento de inércia será dado por (teorema dos eixos paralelos):

$$I' = I_{CM} + MR^2$$

e o momento angular fica sendo:

$$\vec{L}' = I' \vec{\omega} = I_{CM} \vec{\omega} + (MR^2) \vec{\omega}$$

A velocidade do centro de massa pode ser escrita vetorialmente como:

$$\vec{V}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

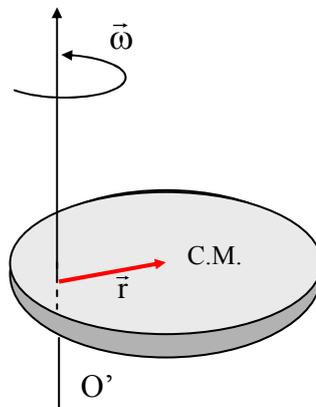


Fig. 8.26 – Rotação de um disco em torno de um eixo paralelo ao eixo polar.

Assim, se tomarmos o duplo produto vetorial

$$\vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = \vec{\omega} (\vec{R} \cdot \vec{R}) - \vec{R} (\vec{R} \cdot \vec{\omega}) = R^2 \vec{\omega}$$

pois como \vec{R} e $\vec{\omega}$ são perpendiculares temos $\vec{R} \cdot \vec{\omega} = 0$. Desta forma,

$$\vec{L}' = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \times \vec{P}_{CM}$$

de onde vemos que o momentum angular de um corpo rígido em relação à rotação em torno de um eixo O' é a soma do momentum angular em relação

ao centro de massa com o momentum angular associado à rotação do centro de massa em torno do eixo O' .

Vimos há pouco que a variação do momentum angular de um sistema depende apenas do torque externo aplicado sobre ele. Vamos utilizar este conceito para analisar a máquina de Atwood mostrada na Fig. 8.27, onde a roldana tem massa M , raio R e momento de inércia $I_0 = MR^2/2$. O momentum angular total do sistema em relação ao eixo O é a soma do momentum da roldana ($I_0\omega$) com o das duas massas ($m_1vR + m_2vR$). Como a corda não desliza sobre a roldana, $v = \omega R$ e, portanto:

$$L = I_0 \frac{v}{R} + (m_1 + m_2)vR$$

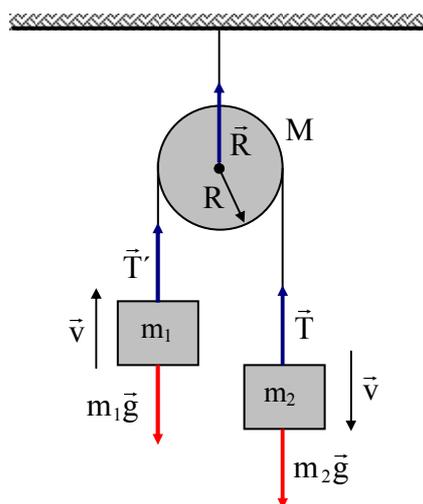


Fig. 8.27 – Máquina de Atwood.

As forças externas agindo sobre o sistema são $m_1 \vec{g}$, $m_2 \vec{g}$ e \vec{R} , mas esta última não realiza torque pois está aplicada sobre o eixo de rotação ($\vec{r} = 0$). Tomando como positivo o sentido entrando no papel, encontramos o torque como sendo:

$$\tau_{\text{ext}} = (m_2 - m_1)gR = \frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dv} \frac{dv}{dt} = \frac{dL}{dv} a$$

Substituindo a expressão de L como função de v obtemos:

$$(m_2 - m_1)gR = \left[\frac{I_0}{R} + (m_1 + m_2)R \right] a$$

$$\Rightarrow a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{I_0}{R^2}} = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

Para o caso $M = 0$, recuperamos o resultado obtido no Cap. 4. Podemos ainda calcular as tensões T e T' existentes na corda. Isolando m_1 e m_2 , obtemos:

$$m_2g - T = m_2a \Rightarrow T = m_2(g - a)$$

$$T' - m_1g = m_1a \Rightarrow T' = m_1(a + g)$$

Como o valor de a já foi determinado, encontramos:

$$T = m_2 \frac{(2m_1 + M/2)g}{m_1 + m_2 + M/2}$$

$$T' = m_1 \frac{(2m_2 + M/2)g}{m_1 + m_2 + M/2}$$

No caso $M = 0$, $T = T' = \frac{2m_1m_2g}{m_1+m_2}$, como já obtido anteriormente.

Isolando a corda, como sua massa é nula, a força total sobre ela também o é. Podemos então calcular a força tangencial exercida pela polia sobre ela pois $F + T' - T = 0$. Como $m_2 > m_1$, temos $T > T'$ e

$$F = T - T' = \frac{M}{2} g \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + M/2}$$

8.9 Relação trabalho-energia rotacional

Da mesma forma que na translação, a variação da energia rotacional de um corpo se deve à realização de trabalho por um agente externo, no caso,

o torque. Já sabemos que $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ e a diferencial desta energia será:

$$dK = I \omega d\omega = I(\omega dt) \frac{d\omega}{dt}$$

Sabemos ainda que $d\theta = \omega dt$ e $I d\omega/dt = I\alpha = \tau$. Logo:

$$dK = \tau d\theta = dW$$

Assim, torque que produz uma rotação $d\theta$ realiza uma quantidade de trabalho $dW = \tau d\theta$. A variação da energia rotacional é dada por:

$$\Delta K = \int \tau d\theta$$

8.10 Conservação do momentum angular

Quando o torque é nulo, $\vec{\tau}_{\text{ext}} = d\vec{L}/dt = 0$, o momentum angular é constante. Além da conservação do momentum e da energia, vemos agora a grandeza momentum angular também pode se conservar. Como $L = I\omega$, concluímos que diminuindo I , ω aumenta ou vice-versa. Como casos práticos podemos citar a patinação no gelo e saltos ornamentais. Vamos a seguir analisar alguns exemplos típicos de conservação de momentum angular.

a) Choque entre dois discos – Considere um disco de momento de inércia I_1 e velocidade angular ω_0 , rodando num eixo sem atrito passando por seu centro de massa. Ele cai sobre outro disco de momento de inércia I_2 , inicialmente parado. Vamos calcular a velocidade angular final do conjunto usando conservação do momentum angular.

$$L_i = L_f \Rightarrow I_1 \omega_0 = (I_1 + I_2) \omega_f \Rightarrow \omega_f = \left(\frac{I_1}{I_1 + I_2} \right) \omega_0$$

Este é um choque do tipo inelástico. Vamos calcular a variação da energia do sistema, dissipada em calor. As energias cinética inicial e final são dadas respectivamente por:

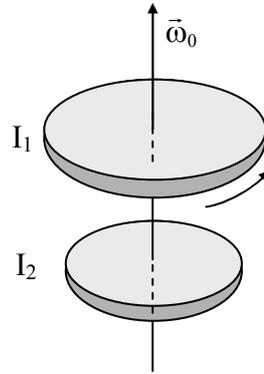


Fig. 8.28 - Choque inelástico entre dois discos.

$$E_i = \frac{1}{2} I_1 \omega_0^2 = \frac{1}{2} \frac{(I_1 \omega_0)^2}{I_1} = \frac{L_i^2}{2I_1}$$

$$E_f = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \omega_f^2 = \frac{1}{2} \frac{[(I_1 + I_2) \omega_f]^2}{(I_1 + I_2)} = \frac{1}{2} \frac{L_f^2}{(I_1 + I_2)}$$

Como $L_i = L_f$ vemos que $E_f < E_i$, isto é:

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{L_i^2}{2} \left(\frac{1}{I_1 + I_2} - \frac{1}{I_1} \right) = - \frac{I_2 I_1}{I_1 + I_2} \frac{\omega_0^2}{2} = - \frac{I_2}{I_1 + I_2} E_i$$

Este resultado é análogo ao do choque perfeitamente inelástico entre duas massas, discutido no Cap.4.

b) Choque inelástico entre bala e barra delgada – Uma barra, de massa M , comprimento L e momento de inércia $I = ML^2/12$, tem seu centro fixo. Uma bala de massa m e velocidade v é disparada perpendicularmente à barra e a atinge a uma distância ℓ , ficando engastada. Se a haste está inicialmente em repouso com que velocidade angular ela rodará?

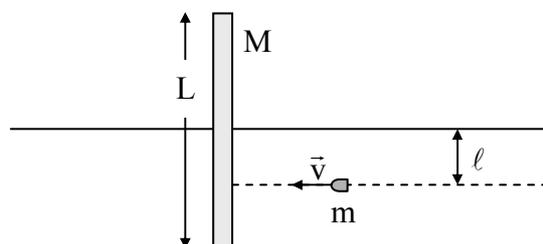


Fig 8.29 - Choque inelástico entre bala e barra delgada.

O momentum angular inicial é $L_i = mv\ell$ e o final é:

$$L_f = (I + m\ell^2)\omega = \left(\frac{ML^2}{12} + m\ell^2\right)\omega$$

Usando a conservação do momentum angular obtemos:

$$\omega = \frac{mv\ell}{\frac{ML^2}{12} + m\ell^2}$$

c) Velocidade dos planetas – Os planetas girando em torno do sol conservam momentum angular, pois a força gravitacional é central ($\vec{r} // \vec{F}$). Baseados neste fato, queremos mostrar que o vetor descrevendo a posição do planeta varre áreas iguais em tempos iguais. Vamos considerar um planeta girando em torno do Sol, como mostra a Fig. 8.30.

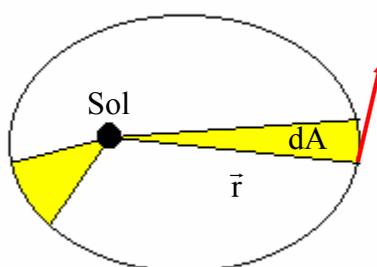


Fig. 8.30 – Rotação de um planeta em torno do Sol.

Durante um intervalo de tempo dt , o planeta desloca-se vdt e o vetor posição \vec{r} varre uma área $dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt$. Assim,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m\vec{v}| = \frac{|\vec{L}|}{2m}$$

Como \vec{L} é constante, dA/dt também o é e os planetas varrem áreas iguais em tempos iguais. Esta lei foi deduzida por Kepler a partir de observações astronômicas.

8.11 Combinação de translação e rotação

Quando um corpo rígido executa simultaneamente os movimentos de translação e rotação, torna-se em geral difícil descrever este movimento combinado. O que se faz é decompor o movimento em dois: o de translação do centro de massa e o de rotação em torno dele. A análise se simplifica mediante o uso do seguinte teorema: “*O torque total em relação ao centro de massa $\vec{\tau}_{CM}$ é igual à derivada temporal do momentum angular relativo a este ponto*”. Matematicamente,

$$\vec{\tau}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{L}_{CM}$$

Para a demonstração deste teorema vamos considerar o sistema de partículas mostrado na Fig. 8.31. \vec{r}_{CM} é o vetor posição do centro de massa, \vec{r}_i é o da i -ésima partícula relativo à origem O e \vec{r}_{iR} é o vetor relativo ao centro de massa. Estas coordenadas estão relacionadas através da expressão:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_{iR}$$

Já vimos no Cap. 6 que o vetor \vec{r}_{CM} é dado por:

$$M\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_{CM} + \vec{r}_{iR}) = \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{r}_{CM} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{iR}$$

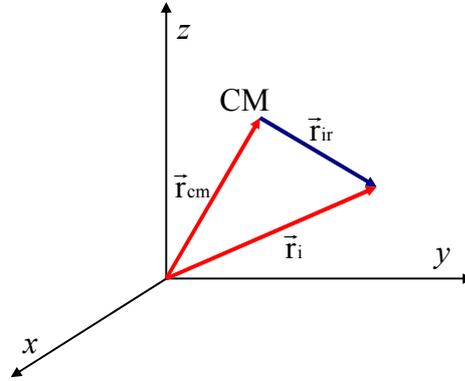


Fig. 8.31 – Sistema de partículas sujeito a translação e rotação.

e, portanto, $\sum m_i \vec{r}_{iR} = 0$, como era esperado já que a massa está distribuída compensadamente ao redor do centro de massa. A velocidade de i -ésima partícula é dada por:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{iR}}{dt} = \vec{v}_{CM} + \vec{u}_i$$

onde \vec{v}_{CM} é a velocidade do centro de massa, \vec{u}_i é a velocidade relativa ao centro de massa e $\sum m_i \vec{u}_i = 0$, que é consequência direta da derivação de $\sum m_i \vec{r}_{iR} = 0$. O momentum angular da partícula relativo ao ponto O é:

$$\begin{aligned} \vec{L}_i &= \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = m_i (\vec{r}_{CM} + \vec{r}_{iR}) \times (\vec{v}_{CM} + \vec{u}_i) \\ \vec{L}_i &= m_i (\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM}) + m_i (\vec{r}_{CM} \times \vec{u}_i) + m_i (\vec{r}_{iR} \times \vec{v}_{CM}) + m_i (\vec{r}_{iR} \times \vec{u}_i) \end{aligned}$$

O momentum angular total do sistema é $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$. Portanto,

$$\vec{L} = \vec{r}_{CM} \times M \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \left(\sum m_i \vec{u}_i \right) + \left(\sum m_i \vec{r}_{iR} \right) \times \vec{v}_{CM} + \sum_i m_i \vec{r}_{iR} \times \vec{u}_i$$

O primeiro termo é o momentum angular do centro de massa relativo ao ponto O, os dois termos entre parênteses são nulos e o último é o momentum angular relativo ao centro de massa, isto é,

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM}$$

O torque total externo agindo no sistema é:

$$\vec{\tau}_{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_{CM} + \vec{r}_{iR}) \times \vec{F}_i = \vec{r}_{CM} \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{iR} \times \vec{F}_i$$

O segundo termo é o torque relativo ao centro de massa e o primeiro é o torque no centro de massa relativo ao ponto O.

$$\vec{\tau}_{ext} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{ext} + \vec{\tau}_{CM}$$

Tomando a derivada temporal da expressão \vec{L} temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} \times M\vec{V}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times M \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} \\ &= \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} + \vec{r}_{CM} \times M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} + \vec{r}_{CM} \times \vec{F} = \vec{\tau}_{ext} \end{aligned}$$

Comparando com a expressão para $\vec{\tau}_{ext}$ obtemos:

$$\vec{\tau}_{CM} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt}$$

Esta equação é muito importante, pois permite separar o movimento translacional do centro de massa do movimento rotacional ao seu redor. Vamos, em seguida, analisar alguns exemplos em que o movimento de rotação aparece combinado com o de translação.

a) Cilindro descendo um plano inclinado – Consideremos um cilindro rolando sobre um plano inclinado sem deslizar, como mostra a Fig. 8.32. Como o ponto de contato é o centro instantâneo de rotação sabemos que $V_{CM} = R\omega$ e $a_{CM} = R\alpha$.

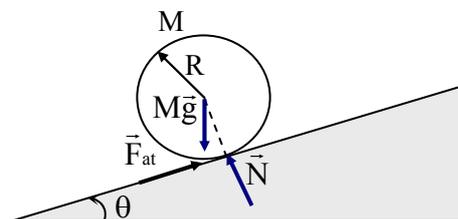


Fig. 8.32 - Cilindro descendo um plano inclinado com atrito.

O único torque ao centro de massa é dado pela força de atrito, no sentido que sai do plano da figura. Desta forma,

$$\tau_{CM} = F_{at} R = \frac{dL_{CM}}{dt} = I_{CM} \frac{d\omega}{dt} = I_{CM} \alpha = I_{CM} \frac{a_{CM}}{R} \Rightarrow F_{at} = \frac{I_{CM}}{R^2} a_{CM}$$

O movimento de translação é descrito pela equação:

$$Mg \sin \theta - F_{at} = Ma_{CM} \Rightarrow Mg \sin \theta = a_{CM} \left(M + \frac{I_{CM}}{R^2} \right) = \frac{3}{2} Ma_{CM}$$

$$\text{Logo: } a_{CM} = \frac{2}{3} g \sin \theta \text{ e } F_{at} = \frac{1}{3} Mg \sin \theta$$

b) Movimento de um giroscópio – O giroscópio, mostrado na Fig. 8.33, roda de tal forma que seu momentum angular é \vec{L} e seu eixo mantém-se no plano horizontal, isto é, $\vec{F} = -M\vec{g}$. O torque relativo ao centro de massa é $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, com módulo $|\vec{\tau}| = MgD$ e sentido de Ω .

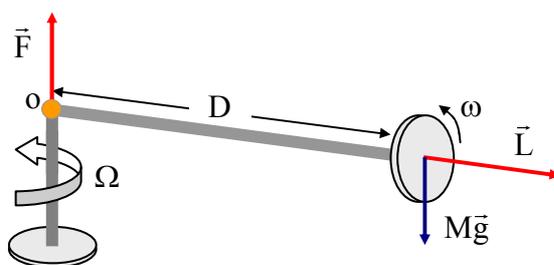


Fig. 8.33 - Movimento de um giroscópio.

Como $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, vemos que $d\vec{L} = \vec{\tau} dt$. O vetor $d\vec{L}$ é perpendicular a \vec{L} , como indica a Fig. 8.34. Em outras palavras, variação de \vec{L} se dá apenas na direção e não no módulo (não existe componente de $d\vec{L}$ paralela a \vec{L}). O efeito é um giro do sistema em torno do ponto de apoio. O acréscimo de ângulo produzido pelo torque é dado por: $d\varphi = \frac{dL}{L}$, e durante o intervalo de tempo dt temos:

$$d\varphi = \frac{dL}{L} = \frac{\tau dt}{L} = \frac{MgD}{L} dt$$

A taxa de variação do ângulo φ , chamada de *velocidade de precessão* do giroscópio, é dada por:

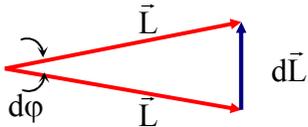
$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{MgD}{L} = \frac{MgD}{I\omega}$$


Fig. 8.34 – Variação de momentum angular produzida pelo torque.

Se \vec{L} fosse nulo Mg seria maior que F e o giroscópio cairia.

De um modo geral, quando o giroscópio é solto na horizontal, há um pequeno movimento na vertical denominado de *nutação*. Esta contribuição aparece quando consideramos a contribuição do movimento do centro de massa ao momentum angular do sistema. O centro de massa tem uma velocidade $V_{CM} = \Omega D$ e assim $|\vec{L}_{CM}| = MV_{CM}D = DM\Omega D = MD^2\Omega$. A direção e sentido de \vec{L}_{CM} é a mesma que \vec{F} . Quando o giroscópio é solto, $\Omega = 0$ e $\vec{L}_{CM} = 0$. O momentum angular nesta direção deve se conservar, pois não há nenhum torque externo nela. Assim, quando \vec{L}_{CM} deixa de ser zero, o giroscópio abaixa um pouco tal que \vec{L} passa a ter uma componente contrária a \vec{L}_{CM} no sentido de anulá-lo. A inércia associada a este movimento faz com

que haja uma oscilação periódica (nutation) na vertical, que tende a se amortecer se houver atrito no sistema. Extinto este movimento, o giroscópio se movimenta um pouco abaixo do plano horizontal.

Caso o giroscópio esteja fazendo um ângulo θ com a vertical, o torque é dado por $\tau = MgD \sin \theta$, de onde se obtém $d\phi = \frac{dL}{L \sin \theta} = \frac{MgD \sin \theta}{L} dt$ e, portanto, $\Omega = \frac{MgD}{I\omega}$ independe do ângulo em que o giroscópio é posicionado.

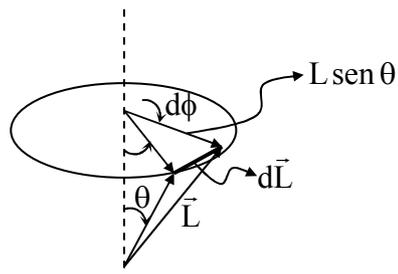
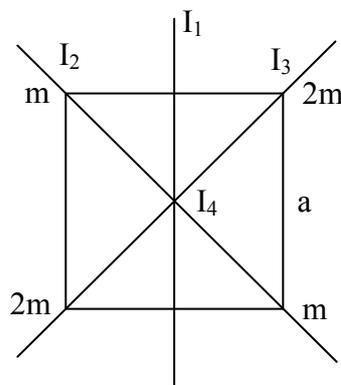
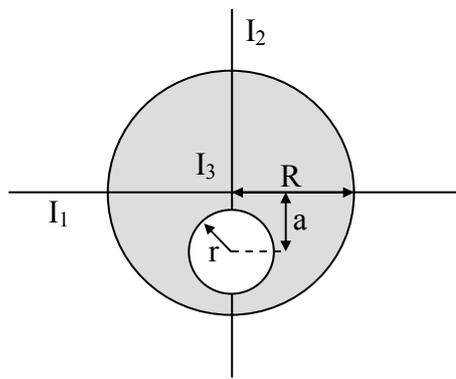


Fig. 8.35 – Giroscópio com eixo inclinado.

Exercícios

- 1 - Calcule o momento de inércia de um quadrilátero de massas pontuais em relação aos eixos mostrados na Fig. 8.36.
- 2 - Um disco de raio R e densidade superficial de massa σ tem um buraco circular de raio r , distando a do centro do disco. Calcule os momentos de inércia em relação aos eixos 1, 2 e 3, mostrados na Fig. 8.37.

**Fig. 8.36****Fig. 8.37**

- 3 - Calcule o momento de inércia de uma esfera de massa M e raio R em relação a um eixo passando pelo centro de massa.
- 4 - Uma barra delgada de massa M e comprimento L faz um ângulo θ com eixo y , conforme mostra a Fig. 8.38.
 - a) Calcule o momento de inércia para rotação em torno do eixo;
 - b) Calcule o momento de inércia para rotação em torno de um eixo paralelo a y e passando pelo centro de massa.
- 5 - Uma escada de M e comprimento L está apoiada numa parede sem atrito e no chão, com atrito μ (Fig. 8.39). Sabendo que o ângulo entre a escada e a parede é 45° , qual deve ser a tensão numa corda amarrada no meio da escada para que ela não caia?

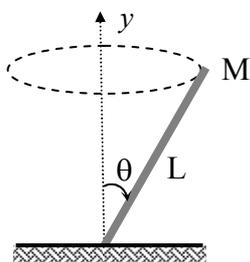


Fig. 8.38

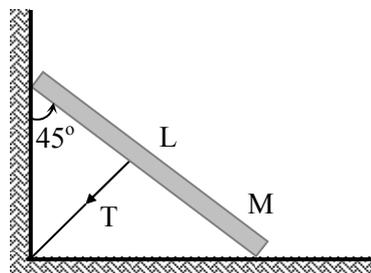


Fig. 8.39

- 6 - Uma escada de massa M e comprimento L está apoiada numa parede e no chão (ambos sem atrito) de maneira a formar um ângulo θ com a parede, conforme mostra a Fig. 8.40. Uma corda amarrada a uma altura H (paralela ao chão) mantém a escada em repouso. Calcule:
- a tensão na corda;
 - a máxima altura H_{\max} em que é possível haver equilíbrio;
 - a aceleração angular no instante em que esta corda for cortada.
- 7 - Uma escada de pintor de massa total $2M$ está aberta de maneira a formar um ângulo θ . Qual deve ser o coeficiente de atrito estático com o chão para que ela não caia? (Fig. 8.41).

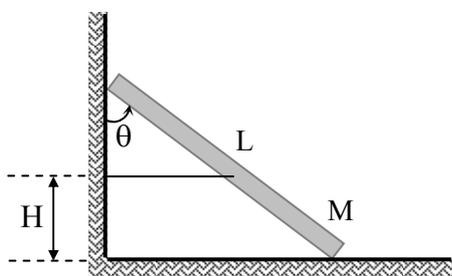


Fig. 8.40

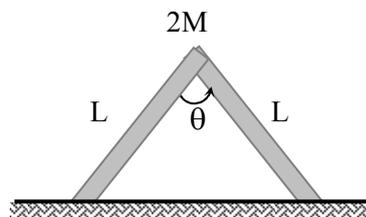


Fig. 8.41

- 8 - Um pintor de massa M está no topo de uma escada de peso desprezível (comprimento de cada lateral: L) que se apóia sobre um assoalho

extremamente liso. Há uma travessa a meia altura que impede a abertura da escada. O ângulo do vértice é θ . Qual é a força na travessa?

- 9 - Uma barra de comprimento L e massa M é colocada sobre um buraco, como mostrado na Fig. 8.42. Qual deve ser o coeficiente de atrito para a barra permanecer em repouso?
- 10 - Sobre uma superfície lisa desliza um bloco cúbico de lado L e massa M , com velocidade v (Fig. 8.43). Num determinado ponto, o cubo bate em um pequeno obstáculo. Qual deve ser a velocidade v para que o bloco rode em torno deste ponto?

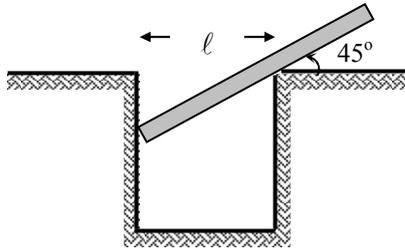


Fig. 8.42

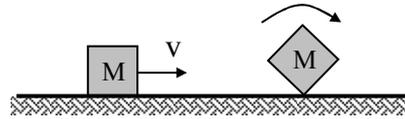


Fig. 8.43

- 11 - Na extremidade de uma haste de comprimento L a massa desprezível é colocada uma massa M . O sistema é solto de vertical sob a ação da gravidade. Qual é a equação que descreve o ângulo $\theta(t)$? (Fig. 8.44).
- 12 - Um arco de raio R , que gira com velocidade angular ω_0 , é colocado sobre uma superfície horizontal áspera, como mostra a Fig. 8.45, sendo a velocidade de seu centro de massa nula. Determinar a velocidade do centro de massa depois de cessado o escorregamento.
- 13 - A integral do torque com relação ao tempo é chamada impulso angular. Partindo da relação $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$, mostre que o impulso é a variação do momentum angular.
- 14 - Uma bola de bilhar inicialmente em repouso recebe um impulso instantâneo de um taco. Este é mantido horizontal a uma distância h do

centro. A bola sai com velocidade v_0 e a velocidade final é $9/7v_0$. Mostre que $h = 4/5R$, onde R é o raio da esfera.

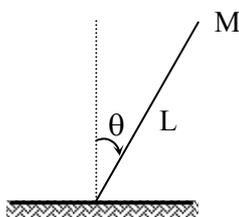


Fig. 8.44

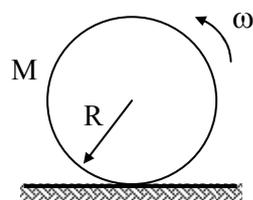


Fig. 8.45

- 15 - Niels Bohr postulou que um sistema mecânico em rotação só pode ter momentum angular com valores múltiplos de uma constante \hbar , chamada constante de Planck ($\hbar = h/2\pi = 1.054 \times 10^{-34}$ J.S), ou seja: $L = I\omega = n\hbar$, sendo n um inteiro positivo ou zero.
- Mostre que com este postulado, a energia de um rotor só pode adquirir valores discretos, isto é, quantizados.
 - Considere uma massa m obrigada a girar num círculo de raio R (átomo de Bohr ou átomo de hidrogênio). Quais são os possíveis valores para a velocidade angular levando-se em conta o postulado acima?
 - Quais valores de energia cinética o átomo pode ter?
- 16 - Muitos dos grandes rios correm para a região equatorial levando sedimentos arenosos. Que efeito isto tem sobre a rotação da Terra?
- 17 - Um cilindro de massa M e raio R roda sem deslizar sobre um plano horizontal. A velocidade do centro de massa é v . Ele encontra um plano com ângulo de inclinação θ à sua frente, como mostra a Fig. 8.46.
- Que altura o cilindro sobe no plano inclinado?
 - Nesta posição, qual foi a variação do momentum angular?
 - Quais foram os impulsos linear e angular?
 - Qual é o tempo que o cilindro demora para atingir a altura máxima?

18 - Um disco de massa M e raio R pode mover-se em torno de um eixo passando pelo seu centro de massa O , conforme mostra a Fig. 8.47. Uma partícula de massa também M segue uma trajetória linear com velocidade v e parâmetro de impacto $d = R/2$ relativo ao ponto O . Ao chocar-se com o disco ela sofre uma deflexão de 90° e tem sua velocidade mudada para $v(2\sqrt{3})$.

- Qual é a velocidade angular do disco após a colisão?
- Qual é a energia dissipada na colisão?

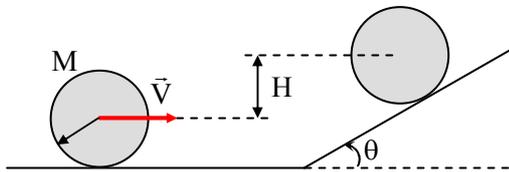


Fig. 8.46

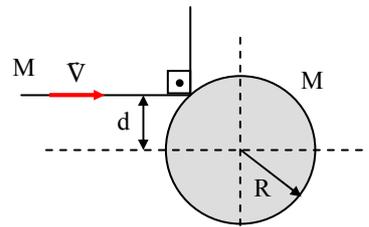


Fig. 8.47

19 - Um disco de massa $2m$ e raio R repousa sobre uma mesa horizontal extremamente lisa. Uma bala de massa m , velocidade v_0 e parâmetro de impacto R atinge o disco e engasta nele (Fig. 8.48). Calcule:

- A velocidade angular do sistema logo após a colisão;
- A velocidade do centro de massa após a colisão;
- A energia dissipada na colisão.

20 - Uma bola de bilhar inicialmente em repouso recebe um impulso instantâneo de um taco, que forma um ângulo θ com a horizontal, como mostra a Fig. 8.49. A bola sai com velocidade inicial v_0 e ao final do movimento ela encontra-se em repouso.

- Determine o ângulo θ para que isto aconteça;
- Qual é a velocidade angular inicial da bola?
- Qual foi a energia dissipada durante o movimento?

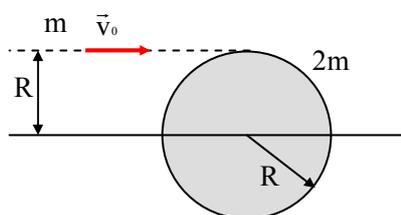


Fig. 8.48

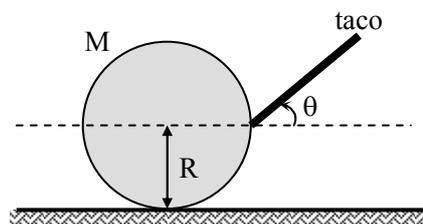


Fig. 8.49

21 - Uma partícula de massa m está presa ao extremo de um fio e percorre uma trajetória circular de raio r sobre uma mesa horizontal sem atrito. O fio passa por um orifício de mesa e o outro extremo se encontra inicialmente fixo. Neste caso, o raio inicial é r_0 e a velocidade angular inicial é ω_0 . Começa-se então a puxar lentamente o fio de maneira a diminuir o raio da trajetória circular, como mostra a Fig. 8.50.

- Como variará a velocidade angular em função de r ?
- Qual é o trabalho realizado para levar a partícula até o raio $r_0/2$?

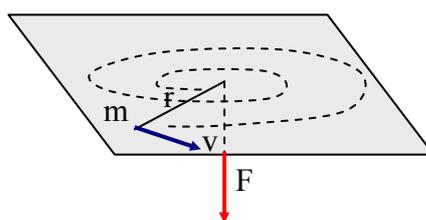


Fig. 8.50

22 - Considere um cilindro de massa M e raio R descendo um plano inclinado de ângulo θ sem deslizar. Calcule a aceleração do centro de massa e a força de atrito agindo sobre o cilindro.

23 - Uma bola de bilhar de massa M e raio R ($I = \frac{2}{5} MR^2$) desliza sem rodar com velocidade v_0 sobre uma mesa sem atrito. Subitamente ela encontra uma parte da mesa com atrito e depois de algum tempo está rodando sem deslizar.

- Calcule a velocidade final da bola;
- Qual é a energia dissipada no processo?

OSCILAÇÕES 9

9.1 O movimento harmônico simples

De um modo geral, chamamos de oscilações aquela classe de movimento que se repete no tempo, quer seja de uma maneira ordenada ou não. O movimento que se repete regularmente com o passar do tempo é chamado de *periódico* e o intervalo decorrente entre duas situações equivalentes é o período do movimento.

O estudo de oscilações é uma parte importante da mecânica devido à frequência com que este tipo de evento ocorre. O simples balançar das folhas de uma árvore, as ondas de rádio, o som e a luz são exemplos típicos onde o movimento oscilatório acontece. Dentre estes movimentos, aquele chamado de harmônico é o mais simples, porém, é um dos mais importantes devido à sua vasta aplicabilidade. No estudo do movimento harmônico simples (MHS) nós vamos considerar apenas o caso unidimensional, onde a posição de um corpo em relação à posição de equilíbrio é dada por uma expressão do tipo:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

onde A é a amplitude do movimento, ϕ é a fase e ω_0 é a frequência natural ou frequência de ressonância do sistema. A e ϕ dependem das condições iniciais do movimento enquanto que ω_0 é uma grandeza intrínseca ao sistema, que está relacionada com o período pela expressão:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

onde $f = 1/T$ é a frequência em Hertz (Hz) e ω_0 tem dimensões de rad/s.

Um gráfico da função $x(t)$ está mostrado na Fig. 9.1. Um exemplo simples do MHS é a projeção (ou a sombra) de um corpo em movimento circular uniforme sobre o eixo x .

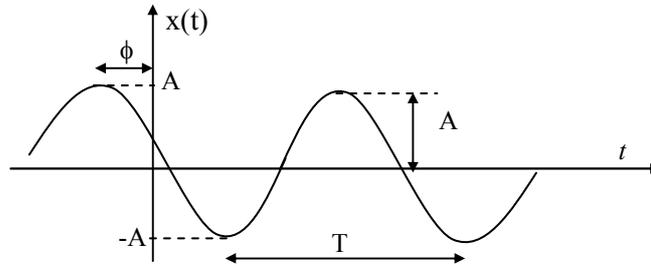


Fig. 9.1 - Movimento harmônico simples.

O MHS é caracterizado por ter funções bem comportadas (analíticas) tanto em $x(t)$ como em $v(t)$ e $a(t)$. De fato, estas grandezas são sempre contínuas, com derivadas também contínuas. Isto já não ocorre, por exemplo, para uma partícula oscilando no interior de uma caixa unidimensional de comprimento L , mostrada na Fig. 9.2. Neste caso, $x(t)$ é uma função periódica e triangular, apresentando nos pontos $x = 0$ e $x = L$ descontinuidade na derivada primeira, já que a velocidade troca de sinal devido à colisão com a parede.

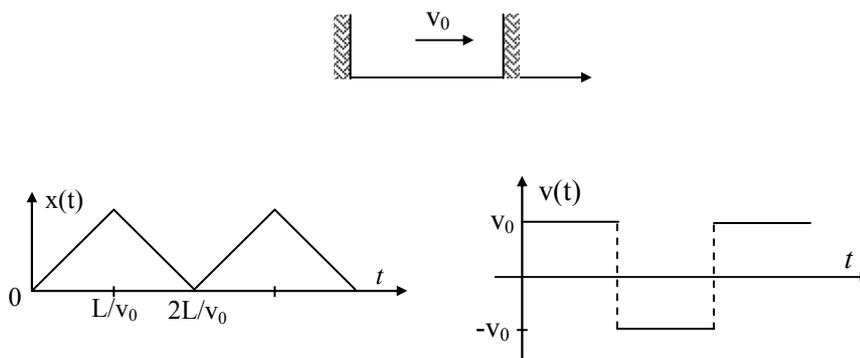


Fig. 9.2 – Movimento periódico de uma partícula dentro de uma caixa.

Voltando ao caso do MHS, onde $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$, podemos encontrar $v(t)$ e $a(t)$ através da operação de diferenciação:

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 x(t)$$

de onde vemos que a velocidade está 90° fora de fase com a posição e que a aceleração é proporcional ao deslocamento, porém com a sentido oposto. Da 2ª lei de Newton, temos:

$$F = ma = -m\omega_0^2 x = -kx$$

que é a força encontrada num oscilador harmônico simples (sistema massa-mola). Sempre que a força é proporcional e oposta ao deslocamento temos a ocorrência do MHS. A constante k é denominada constante de mola ou constante de força do oscilador e a frequência natural de oscilação do sistema, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, é completamente independente da amplitude e fase do movimento.

A velocidade máxima que um corpo em MHS pode atingir é $v_{\max} = A\omega_0$, de onde vemos que quanto maior for a amplitude do movimento, maior será a velocidade máxima. Da maneira que escrevemos $x(t)$ e $v(t)$, notamos que para $t = 0$ temos $x(0) = x_0 = A \cos \phi$ e $v(0) = v_0 = -A\omega_0 \operatorname{sen} \phi$. Assim, expandindo o co-seno existente em $x(t)$ temos:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \cos \phi \cos \omega_0 t - A \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \omega_0 t$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t$$

que é a solução mais geral para o movimento de um oscilador harmônico simples sujeito às condições iniciais $x(0) = x_0$ e $v(0) = v_0$.

9.2 O sistema massa-mola

Um dos sistemas mais simples que constitui um oscilador harmônico é o sistema massa-mola mostrado na Fig. 9.3. A equação de movimento é dada por:

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Chamando $k/m = \omega_0^2$ ficamos com a equação do MHS:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

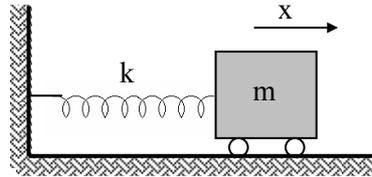


Fig. 9.3 – Sistema massa-mola.

Neste tipo de equação diferencial, que também aparece no caso do pêndulo e mesmo em outros sistemas, a raiz da constante que aparece multiplicando o termo linear é a frequência natural de oscilação do sistema. A solução desta equação é uma função do tipo $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$, que multiplicada por ω_0^2 e somada à sua derivada segunda resulta num termo nulo. Vimos que esta solução pode ainda ser escrita como:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \text{sen } \omega_0 t$$

$$v(t) = -x_0 \omega_0 \text{sen } \omega_0 t + v_0 \cos \omega_0 t$$

A força restauradora $F = -kx$ gera uma energia potencial $V(x)$ dada por:

$$V(x) = -\int_0^x F(x) dx = \frac{1}{2} kx^2$$

e assim a energia total do sistema é:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Substituindo os valores de $x(t)$ e $v(t)$ encontramos:

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

que é a energia inicial do sistema e que se mantém constante durante todo o movimento, havendo apenas troca entre as energias cinética e potencial.

A conservação de energia permite outra maneira de encontrarmos a função $x(t)$ sem resolver a equação diferencial. Como

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

podemos escrever a velocidade como função de x :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2\right) = \omega_0^2\left(\frac{2E}{m\omega_0^2} - x^2\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2} - x^2} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2} - x^2}} = \omega_0 dt$$

Integrando entre $x(0) = x_0$ e $x(t) = x$ e usando $\int \frac{d\mu}{\sqrt{a^2 - \mu^2}} = \arcsen \frac{\mu}{a}$, temos:

$$\arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{k}}}\right) - \arcsen\left(\frac{x_0}{\sqrt{\frac{2E}{k}}}\right) = \omega_0 t$$

onde $m\omega_0^2 = k$ foi usado. Logo

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \arcsen\left[\omega_0 t + \arcsen\left(\frac{x_0}{\sqrt{\frac{2E}{k}}}\right)\right]$$

Se chamarmos $A = \sqrt{2E/k}$ e $\phi = \text{sen}^{-1}\left(\frac{x_0}{\sqrt{2E/k}}\right) - \pi/2$, obtemos a já conhecida solução:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

As condições iniciais são agora dadas em termo de x_0 e E . Vamos tomar dois exemplos de condição iniciais:

a) $x = x_0, v = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2} kx_0^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2E}{k}} = x_0$, de onde tiramos que $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$.

b) $x = 0, v = v_0 \Rightarrow \frac{1}{2} mv_0^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2E}{k}} = \frac{v_0}{\omega_0}$ e assim, $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \text{sen } \omega_0 t$.

A energia potencial do sistema massa-mola, $V(x) = \frac{1}{2} kx^2$ está mostrada na Fig. 9.4. A energia determina completamente a amplitude do movimento bem como a velocidade máxima que o corpo pode atingir.

A amplitude máxima, dada por $A = \sqrt{2E/k}$, determina o ponto de retorno. Como $v(x) = \omega_0 (2E/k - x^2)^{1/2}$, vemos que a velocidade é nula nos pontos de retorno ($\pm A$). Por outro lado, a velocidade é máxima para $x = 0$ e vale $v_{\text{max}} = \sqrt{2E/m}$.

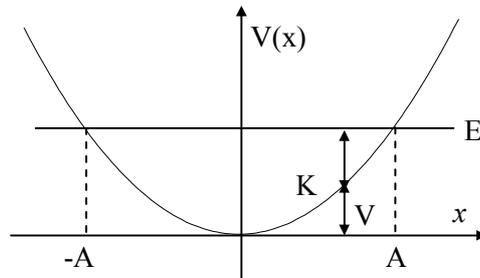


Fig. 9.4 – Energia potencial do sistema massa-mola.

9.3 O sistema massa-mola com gravidade

Vamos analisar o que ocorre quando temos um corpo de massa m pendurado numa mola vertical sob a ação do campo gravitacional, como mostra a Fig. 9.5. Se no movimento horizontal a posição de equilíbrio é no ponto $x = 0$, na presença da gravidade esta posição é deslocada até o ponto em que a força peso é equilibrada pela força da mola, isto é, $mg = ky_0 \Rightarrow y_0 = \frac{mg}{k}$.

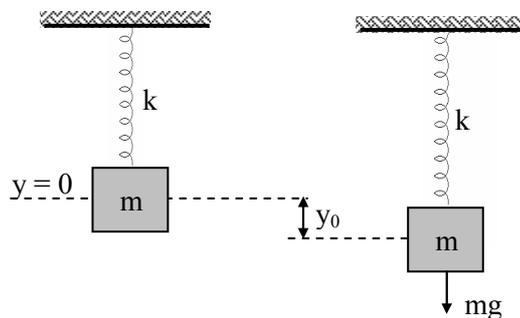


Fig. 9.5 – Sistema massa-mola sujeito ao campo gravitacional.

A 2ª lei de Newton nos leva à equação de movimento:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky + mg = -k(y - y_0)$$

onde $y_0 = mg/k$ é a nova posição de equilíbrio. Definindo $y' = y - y_0$, a equação diferencial se torna:

$$m \frac{d^2 y'}{dt^2} = -ky' \Rightarrow \frac{d^2 y'}{dt^2} + \omega_0^2 y' = 0$$

cuja solução já é conhecida: $y' = y - y_0 = A \cos(\omega_0 t + \phi)$. Isto quer dizer que o oscilador harmônico sob a ação da gravidade tem o mesmo comportamento que quando colocado na horizontal, apenas sua posição de equilíbrio desloca-se de y_0 . Podemos escrever a energia potencial do sistema como:

$$V(y) = \frac{1}{2}ky^2 - mgy$$

onde o zero da energia potencial gravitacional foi tomado em $y = 0$. Completando os quadrados vemos que $V(y)$ é dada por:

$$V(y) = \frac{1}{2}k(y - y_0)^2 - \frac{m^2g^2}{2k}$$

A curva que descreve a energia potencial $V(y)$ está mostrada na Fig. 9.6. Comparando com o oscilador horizontal, vemos que a ação da gravidade é o de deslocar o mínimo da curva de potencial para o ponto $(y_0, V(y_0))$ onde $y_0 = mg/k$ e $V(y_0) = -m^2g^2/2k$. Nem a frequência ω_0 nem a amplitude do movimento são alterados por influência da gravidade.

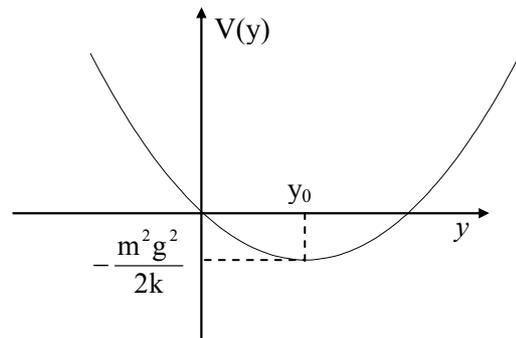


Fig. 9.6 – Energia potencial do sistema massa-mola sujeito à gravidade.

9.4 O pêndulo matemático

O pêndulo simples ou matemático é um outro exemplo bastante importante de movimento harmônico. De acordo com a Fig. 9.7, o torque em relação ao ponto O é $\tau = -mgL \sin \theta$, sendo que o sinal negativo se deve ao fato de que o torque está no sentido oposto ao que o ângulo aumenta.

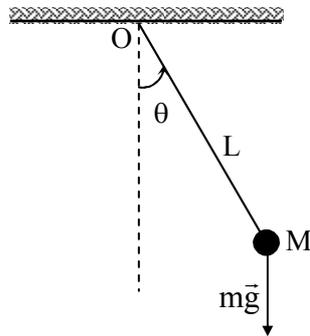


Fig. 9.7 – Pêndulo simples ou matemático.

Como $\tau = I\alpha = I\ddot{\theta}$, temos $I\alpha = mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL \sin \theta$, que pode ser escrito como:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

onde $\omega_0^2 = g/L$. Esta equação diferencial é muito difícil de ser resolvida mas para ângulos pequenos ($\theta < 15^\circ$) podemos aproximar $\sin \theta$ por θ e assim,

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

cuja solução é $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$. Este resultado também pode ser encontrado através de considerações energéticas. As energias cinética e potencial são dadas respectivamente por:

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{mL^2}{2} \dot{\theta}^2$$

$$V(\theta) = mgL(1 - \cos \theta)$$

onde o zero da energia gravitacional foi escolhido na posição mais baixa da massa. A energia total $E = K + V$ é uma constante de movimento e assim, $dE/dt = 0$. Logo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mL^2}{2} \dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos \theta) \right) = 0$$

$$mL^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgL \sin \theta \dot{\theta} = mL \dot{\theta} (L \ddot{\theta} + g \sin \theta) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

onde a aproximação $\sin \theta \approx \theta$ foi usada.

9.5 O pêndulo físico

Pêndulo físico é o nome dado a qualquer corpo rígido suspenso por um ponto diferente do centro de massa, que quando solto de um certo ângulo oscila em torno da posição de equilíbrio, como mostrado na Fig. 9.8.

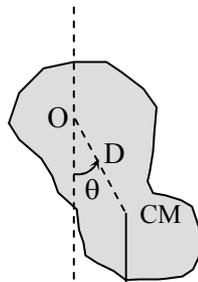


Fig. 9.8:- Pêndulo físico.

Para se encontrar a equação diferencial do pêndulo físico, usa-se o mesmo procedimento adotado para o pêndulo simples. O torque é $\tau = -mgD \sin \theta$ e, portanto,

$$\tau = -mgD \sin \theta = I \ddot{\theta}$$

onde $\omega_0^2 = mgD/I$ é a frequência natural de oscilação. No caso do pêndulo matemático, $I = mD^2$ e, portanto, $\omega_0^2 = g/D$. No caso de uma barra delgada de massa m e comprimento L , $I = \frac{1}{3}ML^2$, $D = L/2$ é a posição do centro de massa e, portanto, $\omega_0^2 = \frac{3}{2}g/L$.

9.6 Oscilação de dois corpos

Vamos considerar o caso em que dois corpos de massas M_1 e M_2 são interconectados através de uma mola de constante k e comprimento livre ℓ , como mostra a Fig. 9.9. Seja $x_1(t)$ e $x_2(t)$ a posição dos corpos em relação a uma origem arbitrária. A variação no comprimento da mola é dada por:

$$x = (x_2 - x_1) - \ell$$

de forma que se a mola estiver distendida $x > 0$ e se estiver comprimida $x < 0$.

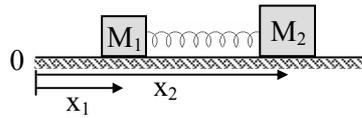


Fig. 9.9 – Corpos conectados por uma mola.

As forças sobre os corpos dependerá do sinal de x :

$$M_1 \ddot{x}_1 = kx$$

$$M_2 \ddot{x}_2 = -kx$$

Podemos combinar estas equações de movimento e obter resultados interessantes. Por exemplo, somando as duas equações temos:

$$M_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + M_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = M_1 a_1 + M_2 a_2 = (M_1 + M_2) a_{\text{CM}} = 0$$

Isto implica que a aceleração do centro de massa é nula e, conseqüentemente, a velocidade do centro de massa é constante, pois não existem forças externas. Podemos também analisar o movimento relativo ao centro de massa. Vamos re-escrever as equações de movimento como:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{k}{M_1} x$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{k}{M_2} x$$

Subtraindo a primeira da segunda, obtemos:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_1) = -k \left(\frac{1}{M_2} + \frac{1}{M_1} \right) x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{\mu} x \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 = 0$$

onde $\omega_0^2 = k/\mu$ e $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}$ é chamada de *massa reduzida*. Desta forma, encontra-se uma equação diferencial bastante conhecida que descreve entre os dois corpos como função do tempo. A introdução da massa reduzida faz com que o oscilador constituído de dois corpos seja equivalente ao sistema de apenas uma massa e uma mola. Esta consideração é bastante importante no estudo de vibrações moleculares.

9.7 O sistema mola-cilindro

Um cilindro de massa m e raio R está ligado a uma mola de constante k , como mostra a Fig. 9.10. Queremos encontrar a frequência de oscilação do sistema quando o cilindro roda sem deslizar. Chamaremos de x a coordenada do centro de massa do cilindro com origem na posição em que a mola não está distendida. Sendo F_{at} a força de atrito, as equações de movimento são:

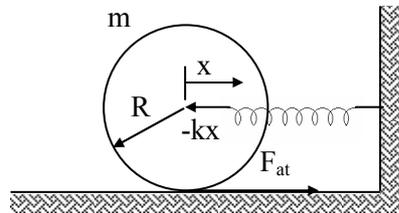


Fig. 9.10 – Sistema mola-cilindro.

$$m\ddot{x} = F_{at} - kx$$

para a translação do centro de massa e

$$I\alpha = -F_a R$$

Para a rotação em torno do centro de massa. Como o cilindro roda sem deslizar temos $\alpha = \ddot{x}/R$ e assim,

$$\frac{mR^2}{2} \frac{\ddot{x}}{R} = -F_{\text{at}} R \Rightarrow F_{\text{at}} = -\frac{m}{2} \ddot{x}$$

Substituindo na equação da translação,

$$\frac{3}{2} m \ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

onde

$$\omega_0^2 = \frac{2}{3} \frac{k}{m}$$

9.8 Oscilações amortecidas

De um modo geral, a existência de atrito faz com que a energia de um sistema oscilante seja dissipada. Como a energia de um oscilador simples está diretamente ligada à amplitude do movimento, a dissipação de energia acarreta um decréscimo na amplitude. Consideremos um oscilador tipo massa-mola no interior de um meio viscoso. Sua equação de movimento é da forma:

$$m \ddot{x} = -b \dot{x} - kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Como discutimos anteriormente, devido ao atrito, a amplitude deve diminuir com o tempo de modo que podemos tentar uma solução do tipo $x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)$. Substituindo esta função na equação diferencial obtemos:

$$\left(\lambda^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \frac{b\lambda}{m}\right) Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi) + \left(2\lambda\omega - \frac{b\omega}{m}\right) Ae^{-\lambda t} \text{sen}(\omega t + \phi) = 0$$

onde $\omega_0^2 = k/m$. Da equação acima tiramos:

$$2\lambda = \frac{b}{m} \Rightarrow \lambda = \frac{b}{2m}$$

$$\lambda^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \frac{b\lambda}{m} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$

e assim a frequência de oscilação é modificada pela presença do atrito. Considerando o caso em que $\omega_0 > b/2m$ (sistema sub-amortecido) vemos que a solução é escrita como:

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{bt}{2m}\right)} \cos(\omega t + \phi)$$

sendo A e ϕ determinados pelas condições iniciais. Um gráfico $x(t)$ está mostrado na Fig. 9.11.

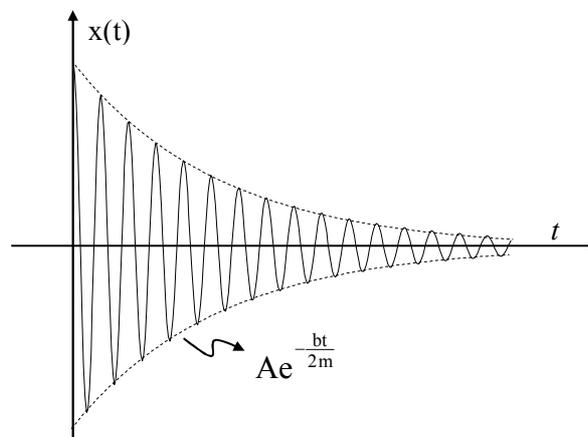


Fig. 9.11 – Movimento harmônico sub-amortecido.

9.9 Oscilações forçadas

Vamos analisar agora o caso de um sistema massa-mola com frequência de ressonância ω_0 submetido a uma força externa do tipo:

$$F_{\text{ext}} = F_0 \sin \omega t$$

A equação diferencial que descreve o movimento é:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

Como o sistema está sendo forçado a uma frequência ω , ele oscilará nesta frequência, porém a amplitude do movimento não aumentará, pois o trabalho

realizado por F é nulo em cada período. Podemos tentar uma solução do tipo $x(t) = A \sin \omega t$. Substituindo na equação diferencial, encontramos o valor de A dado por:

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Quando $\omega_0 < \omega$, A é negativo e isto indica que a resposta do sistema está 180° fora de fase com o estímulo. A potência fornecida pela força F é:

$$P(t) = Fv = -F_0 \sin \omega t \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

$$P(t) = -\frac{F_0^2}{2m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin 2\omega t$$

Quando calculamos a potência fornecida ao sistema durante um período completo temos:

$$P = \int_0^{2\pi} P(t) dt = 0$$

O gráfico da amplitude de movimento como função de ω está mostrado na Fig. 9.12. Podemos ver que A tende a infinito quando $\omega \rightarrow \omega_0$. Porém, na prática isto não acontece porque forças dissipativas impedem que isto aconteça. A equação diferencial para um sistema massa-mola amortecido sujeito a uma força do tipo $F(t) = F_0 \sin \omega t$ é:

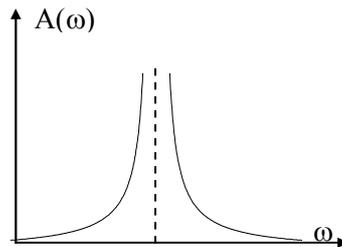


Fig. 9.12 – Amplitude do movimento forçado sem atrito como função da frequência de excitação.

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \text{sen } \omega t$$

Novamente o sistema é obrigado a oscilar com frequência ω , porém, devido ao termo de amortecimento, pode haver uma parte da solução que esteja fora de fase com $F(t)$. Portanto, vamos supor que a solução seja do tipo:

$$x(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \text{sen } \omega t$$

Substituindo na equação diferencial obtemos:

$$\begin{aligned} & \cos \omega t \left(-\omega^2 A_1 + \frac{b\omega A_2}{m} + A_1 \omega_0^2 \right) + \text{sen } \omega t \left(-\omega^2 A_2 - \frac{b\omega}{m} A_1 + A_2 \omega_0^2 \right) \\ &= \frac{F_0}{m} \text{sen } \omega t \end{aligned}$$

Como esta igualdade deve ser válida para qualquer instante de tempo, devemos ter:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) A_1 + \frac{b\omega}{m} A_2 &= 0 \\ -\frac{b\omega}{m} A_1 + (\omega_0^2 - \omega^2) A_2 &= \frac{F_0}{m} \end{aligned}$$

de onde podemos encontrar os valores de A_1 e A_2 e, conseqüentemente, $x(t)$. A solução pode ser colocada na forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \text{sen}(\omega t - \delta) \\ \text{tg } \delta &= \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned}$$

Vemos agora que próximo da ressonância ($\omega \cong \omega_0$), a amplitude do movimento fica limitada ao valor $\frac{F_0}{b\omega}$, portanto, não diverge. Um gráfico desta amplitude está mostrado na Fig. 9.13.

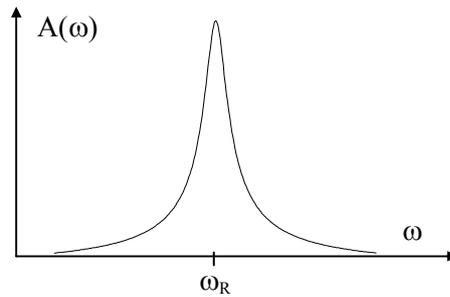


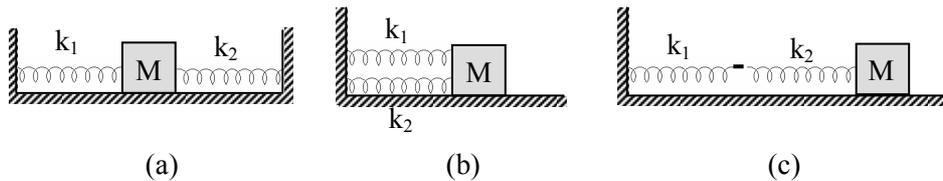
Fig. 9.13 – Amplitude do movimento forçado com atrito como função da frequência de excitação.

A solução que acabamos de encontrar é a chamada solução particular da equação diferencial. Existem também a solução da equação homogênea que é chamada de *transiente* e que desaparece com o passar do tempo. A solução geral da equação diferencial é dada por:

$$x(t) = A'e^{-\left(\frac{bt}{2m}\right)} \cos(\omega't - \phi) + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \text{sen}(\omega t - \delta)$$

Exercícios

- 1 - Nos sistemas mostrados na Fig. 9.14 não há atrito entre as superfícies do corpo e do chão e as molas têm massa desprezíveis. Encontre as frequências naturais de oscilação.

**Fig. 9.14**

- 2 - Composição de movimentos (Figuras de Lissajous) - Consideremos um corpo sujeito a dois movimentos harmônicos em direções ortogonais:

$$x(t) = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x)$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y)$$

- a) Quando ω_x/ω_y é um número racional, a curva é fechada e o movimento repete-se em tempos iguais. Determine a curva traçada pelo corpo para $\omega_x/\omega_y = 1/2, 1/3$ e $2/3$, tomando $A_x = A_y$ e $\varphi_x = \varphi_y$.
- b) Para $\omega_x/\omega_y = 1/2, 1/3$ e $A_x = A_y$, desenhe as figuras para $\varphi_x - \varphi_y = 0, \pi/4$ e $\pi/2$.
- 3 - Considere um cilindro preso por duas molas que roda sem deslizar como mostra a Fig. 9.15. Calcule a frequência para pequenas oscilações do sistema.
- 4 - Considere um pêndulo simples de massa m e comprimento L , conectado a uma mola de constante k , conforme mostra a Fig. 9.16. Calcule a frequência do sistema para pequenas oscilações.

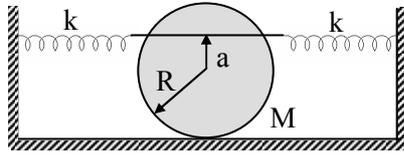


Fig. 9.15

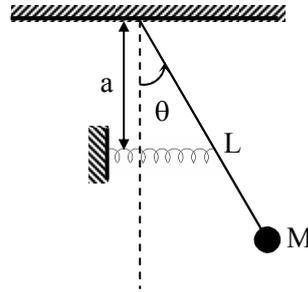


Fig. 9.16

- 5 - Dois movimentos harmônicos de mesma amplitude mas frequências ligeiramente diferentes são impostos a um mesmo corpo tal que $x_1(t) = A \cos \omega t$ e $x_2(t) = A \cos[(\omega + \Delta\omega)t]$. Calcule o movimento vibracional resultante.
- 6 - Considere um pêndulo simples num meio viscoso com constante de força viscosa b . Calcule o novo período de oscilação de pêndulo.
- 7 - Considere uma barra delgada de massa M e comprimento $2L$ apoiada no centro de massa como mostra a Fig. 9.17. Ela é presa nas duas extremidades por molas de constante k . Calcule a frequência angular para pequenas oscilações do sistema.
- 8 - Considere 2 pêndulos (comprimento L e massa M) acoplados por uma mola de constante k , conforme mostra a Fig. 9.18.
- Encontre as equações diferenciais para os ângulos θ_1 e θ_2 .
 - Defina as coordenadas normais de vibração $\aleph = \theta_1 - \theta_2$ e $\beta = \theta_1 + \theta_2$. Encontre as equações diferenciais para \aleph e β . Dica: some ou subtraia as equações de a)
 - Quais são as frequências angulares dos modos normais de vibração?

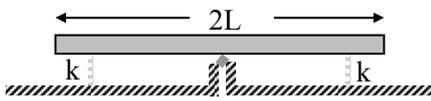


Fig. 9.17

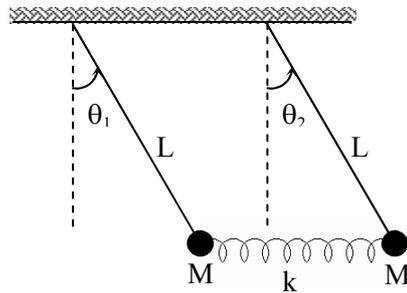


Fig. 9.18

- 9 - Considere um disco de massa M e raio R ($I = \frac{1}{2} MR^2$) que pode rodar em torno do eixo polar. Um corpo de massa m está pendurado em uma corda ideal, que passa pelo disco (sem deslizar) e é presa a uma parede através de uma mola de constante k , como mostra a Fig. 9.19. Calcule a frequência natural do sistema.

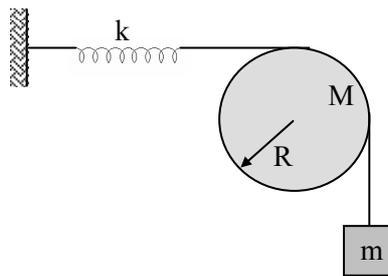


Fig. 9.19

MOVIMENTO ONDULATÓRIO 10

10.1 Introdução

O movimento ondulatório é bastante importante devido ao fato de que a maior parte do intercâmbio de informações ou energia entre sistemas físicos dá-se através de ondas. Uma onda nada mais é do que uma perturbação que se cria num meio material elástico e que se propaga por este meio. Em alguns casos (e.g. ondas eletromagnéticas) a propagação da onda deve-se a dois tipos de energias (elétrica e magnética) que se auto-sustentam. Neste caso, não é necessária a presença de um meio material para que a onda se propague.

Vamos começar nosso estudo imaginando uma corda esticada, presa a uma parede. Como mostra a Fig. 10.1, se um pulso (movimento para cima e para baixo) for introduzido na extremidade livre da corda ele caminhará para a outra extremidade e este efeito é conhecido como *propagação*.

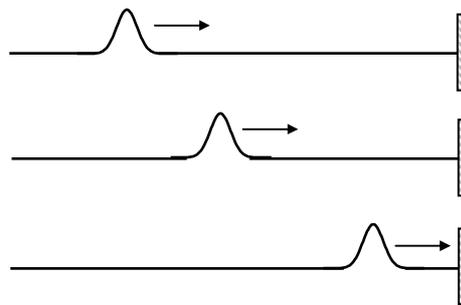


Fig. 10.1 – Pulso propagando-se numa corda esticada.

Durante a propagação do pulso na corda não há transporte de massa pois todas as partículas do sistema mantêm suas posições originais após a

passagem do pulso. Entretanto, existe transporte de energia ao longo da corda já que cada porção dela recebe um acréscimo de energia potencial durante a passagem do pulso.

Em geral, o pulso se alarga durante a propagação e este efeito dá-se o nome de dispersão. Ao atingir a parede, o pulso não consegue continuar a propagação na mesma direção porque o ponto da corda preso na parede é fixo. Assim, ele começa a propagar-se no sentido oposto, retornando para a extremidade livre. Se ao invés da parede rígida tivéssemos uma outra corda mais pesada, o pulso seria parcialmente refletido e parcialmente transmitido para outra corda. Dependendo da densidade de massa deste segundo meio, a parte refletida pode ou não inverter o sinal (o pulso fica virado para baixo).

Esta onda que acabamos de ver tem a direção de propagação perpendicular ao pulso, isto é, cada porção da corda movimenta-se perpendicularmente à direção em que existe a transmissão de energia. Neste caso, a onda é denominada *transversal*. No caso em que as partes de um sistema se movem paralelamente à direção de propagação do pulso temos uma onda do tipo *longitudinal*. Como exemplo, considere uma longa mola esticada na qual um pulso de compressão se propaga. Embora não haja transporte de massa, cada porção do meio material estará animada de movimento oscilatório durante a propagação do pulso.

Vamos a seguir analisar algumas propriedades de um pulso propagando-se numa corda. Como primeira aproximação, vamos supor que não há dispersão, isto é, o pulso mantém sua forma original. Consideremos um referencial fixo O e um referencial O' movendo-se com velocidade v junto com o pulso, como mostra a Fig. 10.2.

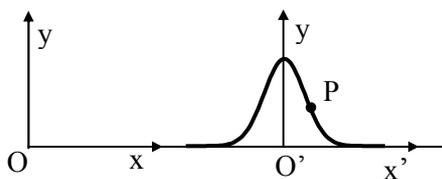


Fig. 10.2 – Propagação de um pulso sem dispersão.

Como o pulso não muda de forma com o tempo, as coordenadas de um ponto P do pulso são dadas por $y = y'$, $x = x' + vt$. A forma do pulso é uma função de x , de forma que para o tempo $t = 0$ temos $y = f(x)$ enquanto que para $t > 0$, $y = f(x - vt)$. Isto representa uma translação da função $f(x)$ para a direita. No caso em que $y = f(x + vt)$ temos uma onda propagando-se para a esquerda.

A função $y = f(x - vt)$ é chamada de função de onda. Dois pulsos propagando-se no mesmo meio tem como função de onda total a soma das funções de onda:

$$Y(x, t) = f_1(x + vt) + f_2(x - vt)$$

originando o fenômeno de interferência, que pode ser construtiva ou destrutiva.

10.2 Propagação de pulsos numa corda

A velocidade com que o pulso se propaga numa corda depende essencialmente das propriedades da corda (tensão e densidade de massa) e não da amplitude do pulso. Consideremos um pulso deslocando-se com velocidade v numa corda de densidade linear de massa μ e tensão T . De acordo com a Fig. 10.3, vamos tomar um elemento da corda com comprimento dx .

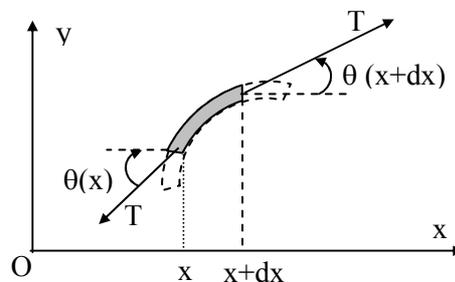


Fig. 10.3 – Elemento de massa de uma corda quando há a passagem de um pulso.

Vamos aplicar a 2ª lei de Newton a este elemento da corda, cuja massa é de $dm = \mu dx$. Como a tensão na corda é T , a força vertical é dada por:

$$F_y = T \operatorname{sen} \theta(x + dx) - T \operatorname{sen} \theta(x)$$

Se considerarmos dx muito pequeno ($\theta(x)$ é muito próximo de $\theta(x + dx)$) e também considerando $\theta(x)$ pequeno tal que $\operatorname{sen} \theta \sim \operatorname{tg} \theta \sim dy/dx$ teremos F_y dada por:

$$F_y = T \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x+dx} - T \left(\frac{dy}{dx} \right)_x = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

Pela 2ª lei de Newton temos $F_y = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Desta forma,

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Esta equação é chamada de equação de onda e descreve totalmente o movimento de um pulso numa corda de densidade linear de massa μ e tensão T . Como $y = f(x - vt)$ depende tanto de x como de t , as derivadas que aparecem na equação são parciais, isto é, deriva-se em relação a uma variável matando a outra constante. Para encontrar a velocidade de propagação do pulso, fazemos:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

onde a regra da cadeia $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}$ foi usada. Comparando esta equação com a equação de onda, concluímos que $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

10.3 Ondas sonoras

A onda na corda que acabamos de ver é um exemplo de onda transversal. Vejamos agora um exemplo de onda longitudinal. As ondas

sonoras correspondem a um processo de compressão e descompressão de um meio gasoso (como o ar), líquido ou mesmo sólido. Vamos considerar que estas ondas são produzidas por um pistão oscilante, como mostrado na Fig. 10.4.

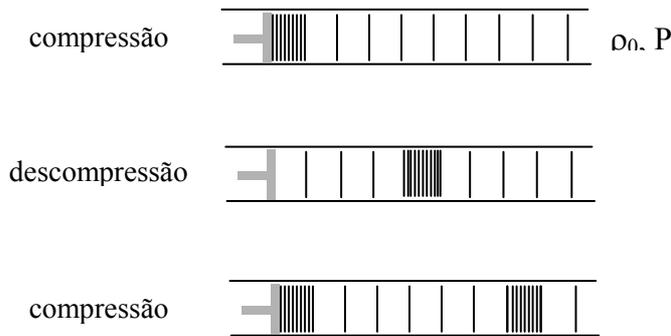


Fig. 10.4 – Ondas sonoras produzidas por um pistão oscilante.

ρ_0 é a densidade de massa e P é a pressão ($P = F/A$) do gás quando não existe compressão. Queremos encontrar a velocidade v com que a compressão (onda de pressão) se desloca ao longo do tubo da Fig. 10.4. Para isto, vamos tomar um referencial que se desloca com velocidade v junto com o pulso e analisar o que acontece com o elemento de massa mostrado na Fig. 10.5.

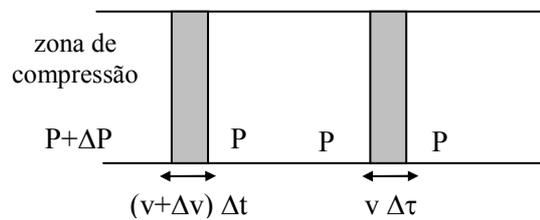


Fig. 10.5 – Comportamento de um elemento de massa de um meio gasoso quando há a passagem de um pulso.

Para um observador no referencial móvel, este elemento caminha para a esquerda com velocidade $-v$. Ao atingir a região de compressão, a pressão (e conseqüentemente a força) no lado esquerdo aumenta, existindo assim uma

força resultante para a direita, que produz uma redução da velocidade do elemento considerado. Ao sair da zona de compressão o gás torna a se expandir e recupera a velocidade v .

O elemento de massa considerado é $\Delta m = \rho_0 V = \rho_0 A v \Delta t$. A força resultante para a direita sobre Δm é:

$$F = (P + \Delta P)A - PA = \Delta P A$$

Pela 2ª lei de Newton,

$$\Delta P A = \Delta m \left(\frac{-\Delta v}{\Delta t} \right) = -\rho_0 A v \Delta t \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right)$$

onde já tomamos Δv como sendo negativo. Portanto,

$$\rho_0 v^2 = -\frac{\Delta P}{(\Delta v/v)}$$

Por outro lado, o volume do elemento do gás é:

$$V = A v \Delta t \Rightarrow \Delta V = A \Delta v \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta V}{V}$$

ou seja, a variação fracional de velocidade é a mesma que a variação fracional de volume. Logo,

$$\rho_0 v^2 = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = -V \frac{\Delta P}{\Delta V} = B$$

onde $B = -V \frac{\Delta P}{\Delta V}$ é uma característica do gás chamado de módulo de compressibilidade volumétrica do gás. Desta forma,

$$v = \sqrt{B/\rho_0}$$

Na tabela seguinte apresentamos a velocidade de propagação do som em vários materiais.

Meio	T(°C)	v (m/s)
ar	0	331
H ₂	0	1286
O ₂	0	317
H ₂ O	15	1450
Pb	20	1230
Al	20	5100
Cu	20	3560
borracha	20	54

10.4 Ondas harmônicas

Se ao invés de darmos um pulso na corda fizermos com que ela oscile devido a uma perturbação periódica, teremos a propagação de um trem de pulsos periódicos e regulares. Quando esta perturbação é da forma senoidal ela deve estar necessariamente sendo produzida por um oscilador harmônico e, portanto, é denominada de onda harmônica. A Fig. 10.6 mostra uma onda harmônica.

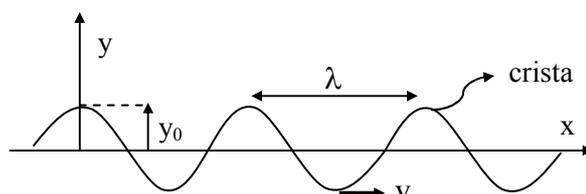


Fig. 10.6 - Onda harmônica.

A distância entre dois máximos consecutivos chama-se comprimento de onda (λ) enquanto que a amplitude da onda mostrada é y_0 . À medida que a onda se propaga pela corda, cada um de seus pontos executa um movimento harmônico simples, cuja frequência é a mesma que a da fonte. O período da onda é o inverso da frequência ($T = 1/f$). Ele é o

tempo que um ponto da corda demora executar uma oscilação completa e também é o tempo que a crista da onda demora para andar a distância λ . Portanto,

$$\lambda = vT = v/f$$

A oscilação de cada ponto da corda é descrita pela função

$$y(t) = y_0 \text{sen}(kx - \omega t)$$

onde $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular e, assim,

$$\lambda = v \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$$

onde k é chamado de vetor de onda.

10.5 Efeito Doppler

Imaginemos que ao invés de termos uma fonte parada em relação ao observador, temos agora um movimento relativo entre os dois. Neste caso, se a fonte estiver se aproximando do observador, este “vê” uma frequência maior e se a fonte estiver se afastando, a frequência observada será maior. Este efeito da variação da frequência devido ao movimento relativo fonte-observador é chamado de “efeito Doppler”.

Vamos imaginar uma fonte emitindo sinais com uma frequência f_0 , isto é, durante um segundo são emitidos f_0 pulsos completos. Se ao invés de 1s tomarmos um intervalo de tempo Δt , serão emitidos $N = f_0 \Delta t$ pulsos. Vamos agora analisar os seguintes casos:

a) Observador e fonte parados

Durante o tempo Δt , o 1º pulso percorre uma distância $\Delta \ell = N\lambda = v\Delta t$. Portanto,

$$\lambda = \frac{v\Delta t}{N} = \frac{v\Delta t}{f_0 \Delta t} = \frac{v}{f_0}$$

relação esta que já conhecíamos. O número de pulsos recebido pelo observador será igual ao emitido pela fonte e, conseqüentemente, ele não percebe alterações na freqüência.

b) Fonte em movimento e observador parado

Digamos que a fonte está se movendo com velocidade u . Durante a emissão de uma onda completa (ou de dois pulsos consecutivos) a fonte desloca-se a uma distância $uT = u/f_0$, conforme mostra a Fig. 10.7.

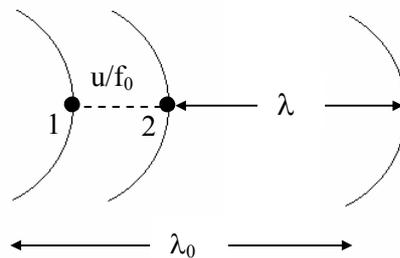


Fig. 10.7 - Fonte em movimento e observador parado.

Desta forma, o comprimento de onda efetivo visto por um observador estacionário é $\lambda = \lambda_0 - u/f_0 = v/f_0 - u/f_0$

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{u}{v} \right)$$

Como a velocidade de propagação não muda, isto nos leva a uma variação de freqüência. Fazendo $f = v/\lambda$, temos: $f = \frac{f_0}{1-u/v}$ fonte se aproximando (f aumenta) e $f = \frac{f_0}{1+u/v}$ fonte se afastando (f diminui)

c) Fonte parada e observador em movimento

No caso que acabamos de analisar, devido ao movimento da fonte, o comprimento de onda emitido se altera. Se a fonte estiver em repouso isto já não acontece, porém se o observador estiver em movimento, o número de ondas recebido por ele, por unidade de tempo, se altera. Se o observador

estiver parado, o número de ondas que passam por ele durante o tempo Δt é dado pela expressão:

$$N\lambda_0 = v\Delta t \quad f_0 = \frac{v}{\lambda_0} = \frac{N}{\Delta t}$$

Por outro lado, se o observador estiver se aproximando da fonte com velocidade u , o número de ondas que ele recebe durante o tempo Δt é:

$$N' = \frac{v\Delta t}{\lambda_0} + \frac{u\Delta t}{\lambda_0}$$

e a frequência observada é:

$$f = \frac{N'}{\Delta t} = \frac{v+u}{\lambda_0} = f_0 \left(1 + \frac{u}{v}\right) \quad (\text{aproximando, } f \text{ aumenta})$$

e quando o observador estiver se afastando da fonte,

$$f = f_0 \left(1 - \frac{u}{v}\right) \quad (\text{afastando, } f \text{ diminui})$$

Quando $u \ll v$, podemos mostrar que a frequência depende apenas da velocidade relativa entre o emissor e o receptor, diferindo nos casos b) e c) apenas por um termo da ordem $(u/v)^2 \ll 1$, que é chamado de efeito Doppler de 2ª ordem.

Até agora apenas consideramos casos em que $u < v$. O que acontece se $u > v$? Nesta condição, as ondas emitidas pela fonte ficam para trás, não havendo nenhuma onda adiante. Imaginemos uma fonte emitindo ondas bidimensionais que se propagam com velocidade v . Se a fonte estiver em repouso observaremos um padrão de ondas, como mostrado na Fig. 10.8, que se espalha uniformemente no plano. Imaginemos agora a fonte deslocando-se para a direita com velocidade $u > v$. No ponto 1 ela emite uma onda. Decorrido um intervalo de tempo Δt , esta onda terá se propagado de maneira a formar um círculo de raio $v\Delta t$ em torno do ponto 1. Por outro lado, a fonte terá se deslocado para o ponto 2, distante $u\Delta t$ do ponto 1, tendo emitido várias ondas durante este tempo, conforme mostra a Fig. 10.9.

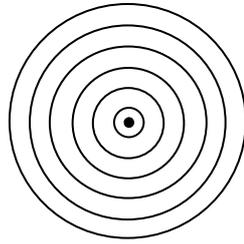


Fig. 10.8 - Fonte parada.

As ondas estarão confinadas num cone de ângulo θ dado por:

$$\text{sen } \theta = \frac{v \Delta t}{u \Delta t} = v/u$$

Isto pode ser observado se um objeto anda na água emitindo ondas.

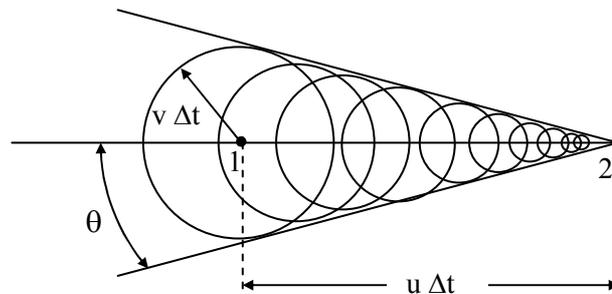


Fig. 10.9 – Fonte em movimento com velocidade maior que a da onda.

10.6 Ondas estacionárias

Quando as ondas estão confinadas numa determinada região do espaço, ondas incidentes e refletidas no contorno desta região interferem, produzindo configurações especiais de ondas denominadas *estacionárias*. Estas ondas possuem uma propriedade importante: num certo ponto x , o meio oscila em torno daquele ponto com amplitude constante (independente do tempo). Assim, ondas estacionárias têm como característica apresentarem amplitudes de oscilações dependentes da posição, mas independentes do

tempo. A seguir, vamos considerar ondas estacionárias em diversas situações distintas.

a) Corda com as duas extremidades fixas

Imaginemos uma corda que tem numa das extremidades um elemento vibrador (tipo diapasão) e na outra uma parede fixa. As ondas geradas pelo vibrador são de pequena amplitude e refletem na parede e no próprio vibrador, ficando assim confinadas e formando uma onda estacionária. Se as ondas geradas pelo vibrador tiverem a frequência correta interferirão construtivamente após uma volta completa nesta “cavidade ressonante” e no final, a amplitude de vibração será muito maior que a amplitude da própria fonte emissora. Esta situação é conhecida como *ressonância*.

Nas extremidades fixa, a corda não pode oscilar e tem, portanto, amplitude nula. Estes pontos são chamados de *nós* e a distância entre dois nós consecutivos é $\lambda/2$ nesta região. Assim, a condição de onda estacionará numa corda de comprimento L e extremidades fixas, é dada por:

$$L = n\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$. Esta condição determina λ completamente. Para encontrarmos as frequências de ressonância podemos utilizar a relação $f = v/\lambda$, onde $v = \sqrt{T/\mu}$ é a velocidade de propagação na corda. Da condição de ressonância temos:

$$2L = n\lambda = n\frac{v}{f} \Rightarrow f_n = \frac{nv}{2L} = nf_1$$

onde f_1 é a frequência do modo fundamental ($n = 1$), que é

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

As frequências f_n são denominadas de frequências naturais da corda. Quando tentamos fazer o diapasão oscilar com frequência diferente de f_n , o

sistema não entra em ressonância e as ondas geradas apresentam amplitude muito pequena, do tamanho da do diapasão. Na Fig. 10.10 mostramos as ondas estacionárias na corda com extremidades fixas. A frequência f_1 é chamada de fundamental e as frequências f_n são denominadas de *harmônicos* de ordem n .

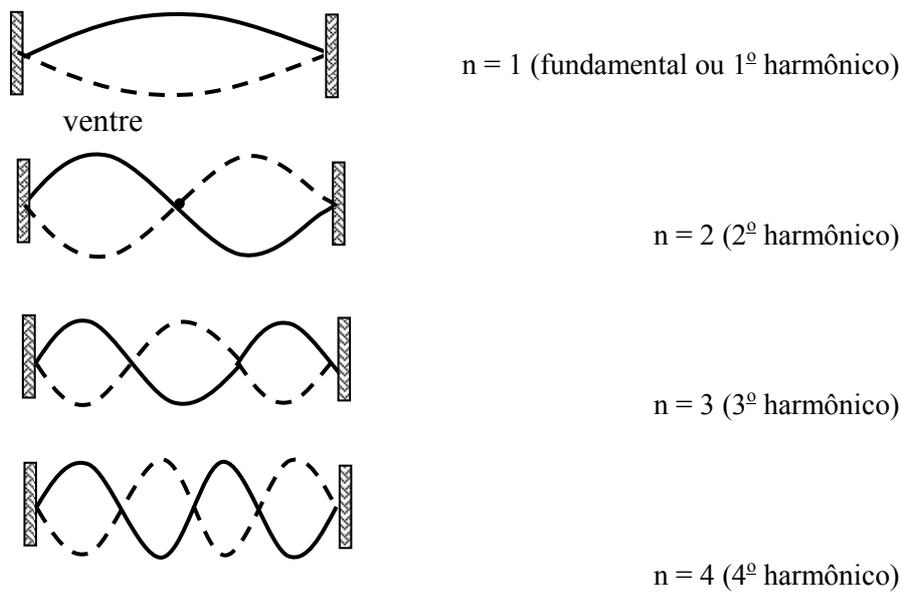


Fig. 10.10 – Ondas estacionárias numa corda com as extremidades fixas.

b) Corda com apenas uma extremidade fixa

Na verdade, não podemos ter uma corda com a extremidade completamente livre devido ao fato de ser necessária a existência de uma certa tensão na corda para termos $v \neq 0$. Na extremidade fixa, a onda refletida é sempre invertida enquanto que na extremidade livre isto já não ocorre e a onda refletida soma-se à incidente. Desta forma, a extremidade livre é sempre uma posição de máxima amplitude (ventre) da onda estacionária formada.

Assim, o comprimento da corda deverá ser um múltiplo inteiro ímpar de $\lambda/4$, ou seja:

$$L = n \frac{\lambda}{4}$$

com $n = 1, 3, 5, \dots$, de onde obtemos que $f_n = n \frac{v}{4L} = n f_1$, onde $f_1 = \frac{v}{4L}$ é a frequência do modo fundamental. A Fig. 10.11 mostra os modos de vibração da corda com extremidade livre.

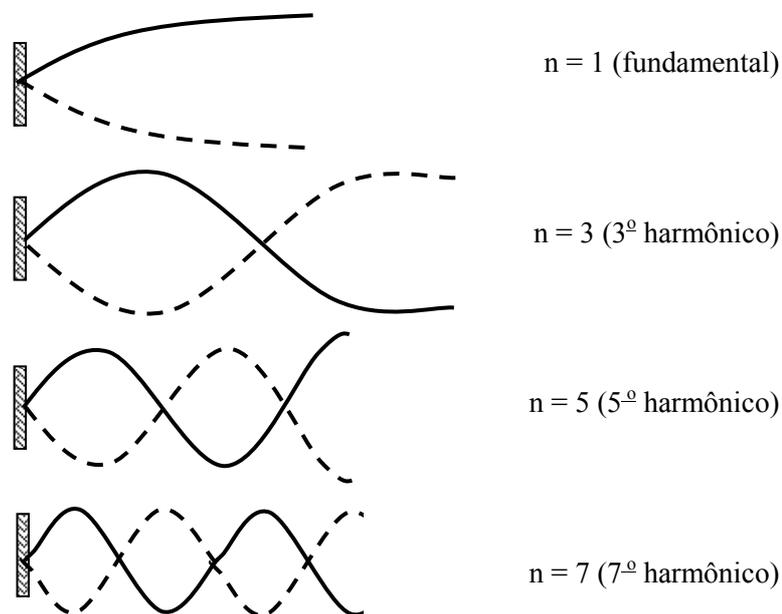


Fig. 10.11 – Ondas estacionárias numa corda com uma extremidade livre.

c) Ondas acústicas estacionárias

Ondas estacionárias não se restringem apenas às ondas em cordas, mas manifesta-se em qualquer fenômeno ondulatório, inclusive em ondas acústicas. Imagine um microfone gerando ondas sonoras, colocado na boca de

um tubo fechado, de comprimento L . O som não pode propagar-se para fora do tubo, pois de um lado existe uma parede rígida e do outro, o microfone e neles são formados os nós da onda estacionária. Assim, da mesma maneira que na corda com extremidades fixas temos:

$$L = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$. As frequências de ressonância são dadas por:

$$f_n = \frac{nv}{2L} = nf_1$$

onde:

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$$

Se por outro lado o tubo for aberto numa das extremidades, as frequências de ressonância são dadas por:

$$f_n = n \frac{v}{4L} = nf_1$$

com $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ e $f_1 = \frac{1}{4L} \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$, que é bem parecido com o caso de uma corda com uma das extremidades livre. Finalmente, quando o tubo é aberto nos dois lados, as frequências de ressonância são as mesmas do que quando o tubo é completamente fechado. Entretanto, aparecerão ventres ao invés de nós nas extremidades do tubo.

10.7 Funções de onda no caso estacionário

As ondas estacionárias são formadas pela superposição de duas ondas que se propagam em direções opostas. Consideremos ondas que se propagam para a direita e para a esquerda, com funções de ondas das por:

$$Y_D = Y_0 \text{sen}(kx - \omega t)$$

$$Y_E = Y_0 \text{sen}(kx + \omega t)$$

A função da onda resultante consiste na soma de Y_D e Y_E :

$$Y = Y_D + Y_E = Y_0 [\text{sen}(kx - \omega t) + \text{sen}(kx + \omega t)]$$

$$\Rightarrow Y = 2Y_0 \cos \omega t \text{sen } kx$$

onde na última passagem usamos a relação:

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{sen} \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

Imagine agora uma corda fixa em $x = 0$ e $x = L$. Temos, portanto, $Y(0) = Y(L) = 0$, para qualquer tempo. Desta forma,

$$\text{sen } kL = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Como $k_n = 2\pi/\lambda_n$, recuperamos a condição de ressonância

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Por outro lado, se a extremidade da corda for livre, temos: $\text{sen } kL = \pm 1$. Logo, $k_n L = n \frac{\pi}{2}$ com $n = 1, 3, 5, 7, \dots$. Usando $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$, obtemos $L = n \frac{\lambda_n}{4}$

10.8 Interferência

Vamos imaginar duas fontes de ondas separadas por uma distância d e um observador localizado sobre a linha que une as duas fontes. As ondas, que suporemos de mesma frequência, podem se adicionar, pois representam perturbações geradas no meio que podem ser somadas se o meio for linear. Isto é conhecido como princípio da superposição. Assim, de acordo com a Fig. 10.12, temos:

$$Y_1 = Y_0 \text{sen}(kx - \omega t)$$

$$Y_2 = Y_0 \text{sen}(kx - \omega t + \delta)$$

onde $\delta = kd$ é a diferença de fase que aparece devido ao fato das fontes estarem separadas. A onda resultante é:

$$Y = Y_1 + Y_2 = Y_0 [\text{sen}(kx - \omega t) + \text{sen}(kx - \omega t + \delta)]$$

$$Y = 2Y_0 \cos \frac{\delta}{2} \text{sen} \left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2} \right)$$

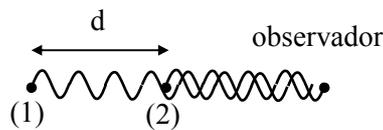


Fig. 10.12 – Interferência entre duas ondas.

Dependendo do valor de δ , a onda resultante poderá ser máxima ou mínima. Assim, se $\frac{\delta}{2} = \frac{kd}{2} = n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), a onda será da forma:

$$Y = 2Y_0 \text{sen}(kx - \omega t + n\pi)$$

que apresenta uma onda duas vezes mais intensa do que cada onda isolada. Este efeito é chamado de *interferência construtiva*. Por outro lado, quando $\frac{\delta}{2} = (n + \frac{1}{2})\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) teremos $y = 0$ e neste caso temos o que se chama de *interferência destrutiva*.

Exercícios

- 1 - Uma corda vibra de acordo com a equação $y(x,t) = 15\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\cos(30\pi t)$, sendo x e y medidos em cm e t em segundos.
 - a) Qual é a velocidade de um elemento da corda na posição $x = 2$ cm no instante $t = 2$ s?
 - b) Qual é a velocidade de propagação desta onda?
- 2 - Discuta as evidências experimentais (que você observa) que nos leva a admitir que a velocidade do som na faixa audível deve ser a mesma para todos os comprimentos de onda.
- 3 - Suponha que no efeito Doppler com o som, a fonte e o observador estejam ambos em repouso, mas o meio está se movendo com relação a este referencial. Haverá alguma variação na frequência recebida pelo observador?
- 4 - Na Fig. 10.13, uma haste está fixa pelo centro a um vibrador. Um disco preso à extremidade da haste penetra num tubo de vidro onde foi espalhado pó de cortiça. Na outra extremidade do tubo existe um pistão móvel. Produzindo-se vibrações longitudinais na haste, observar que para determinadas posições do pistão móvel, o pó de cortiça forma um conjunto de nós e anti-nós. Se para uma destas posições do pistão, conhecermos a distância d entre os anti-nós e a frequência f de vibração, mostre que a velocidade do som no gás é $v = 2fd$. Este é o método de Kundt para determinar a velocidade do som.

**Fig. 10.13**

- 5 - Um tubo pode funcionar como filtro acústico, discriminando as várias frequências dos sons que o atravessam, das suas frequências próprias. O silencioso de um automóvel é um exemplo disto.
- Explique o funcionamento deste filtro.
 - Determinar a “frequência de corte” abaixo da qual o som não é transmitido.
- 6 - O comprimento de uma corda de violino é de 50 cm e sua massa é de 2.0 g. Quando ela é presa pelos extremos a corda pode emitir a nota lá (440 Hz). Onde deve ser colocado o dedo para que a nota emitida seja o dó (528 Hz)?
- 7 - Considere uma fonte que emite ondas de frequência f_0 movendo-se com velocidade v_f sobre o eixo x . Considere um observador movendo-se com velocidade v_0 também sobre o eixo x . Qual será a frequência percebida pelo observador? Chame a velocidade de propagação da onda de v .

GRAVITAÇÃO 11

11.1 Introdução

A lei de Newton da gravitação é comumente expressa pela relação:

$$\vec{F}_{12} = G \frac{M_1 M_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Esta lei refere-se à força entre duas massas pontuais. Uma questão que pode ser colocada é como aplicá-la ao cálculo da força entre um pequeno corpo e a Terra, ou entre a Terra e a Lua, etc., onde sabemos que as partículas que formam estes corpos estão a diferentes distâncias umas das outras e as forças de atração são de direções e módulos diferentes. O próprio Newton protelou por onze anos a publicação da sua lei até ficar convicto de sua validade, porque não sabia provar matematicamente que o resultado da força de atração exercida sobre ou por uma esfera homogênea seria o mesmo se considerasse a massa da esfera concentrada em seu centro. Para provar isso, ele criou o cálculo diferencial e integral.

Fazemos aqui a demonstração dessa lei de uma forma simples. Vamos começar calculando qual é a força que um anel de massa exerce sobre massas pontuais colocadas sobre seu eixo. Tomemos um anel de raio r , largura t e espessura y como mostra a Fig. 11.1.

A área da secção transversal do anel é ty . Vamos chamar de ρ densidade de massa do anel, ou seja, quanta massa existe por unidade de volume. Seja m a massa de uma partícula colocada a uma distância d do centro do anel. Considerando um elemento especificado por um ângulo $d\theta$ do anel,

localizado a distância x da partícula de massa m , a força que esta parte do anel exerce sobre a partícula é, usando a lei da gravitação, dada por:

$$dF = G \frac{m dM}{x^2}$$

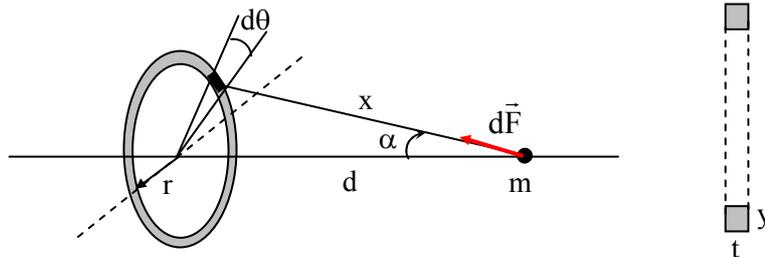


Fig. 11.1 - Geometria para o cálculo da força devido a um anel.

A massa dM do elemento do anel pode ser determinada como:

$$dM = \rho dV = \rho r d\theta y t$$

de modo que a força fica:

$$dF = G \frac{m \rho y t r d\theta}{x^2}$$

Mas, usando o teorema de Pitágoras, $x^2 = d^2 + r^2$, ficamos com:

$$dF = G \frac{m \rho y t r}{d^2 + r^2} d\theta$$

Essa força, que é um vetor, pode ser decomposto numa componente paralela ao eixo do anel e numa componente perpendicular a ele. Como a todo elemento de massa do anel, existe outro igual e diametralmente oposto (de modo a cancelar a componente de força perpendicular ao eixo), só devemos levar em conta a componente paralela. Assim,

$$dF_{//} = dF \cos\alpha$$

e, sendo $\cos\alpha = d/\sqrt{d^2 + r^2}$ ficamos com

$$dF_{//} = Gm \frac{\rho y t r d}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta$$

Essa é a força devido ao elemento de massa considerado. Como queremos a força exercida pelo anel como um todo, devemos somar as contribuições de todos os elementos de massa. Este é justamente o objetivo da integração, o de somar todas as contribuições, que em termos práticos significa fazer o ângulo θ da Fig. 11.1 variar de 0 até 2π . Então,

$$F = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dF_{//} = \int_0^{2\pi} \frac{G m \rho y t r d}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta = \frac{G m \rho y t r d}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

Realizando a integração, temos:

$$F = \frac{2\pi G m \rho y t d r}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

A direção desta força é justamente a do eixo do anel, e o sentido é o de atração. Uma vez que conhecemos a força exercida por um anel, vamos calcular a força exercida por uma casca esférica de espessura x e raio r , sobre uma massa m , distante d do centro da esfera, como mostrado na Fig. 11.2.

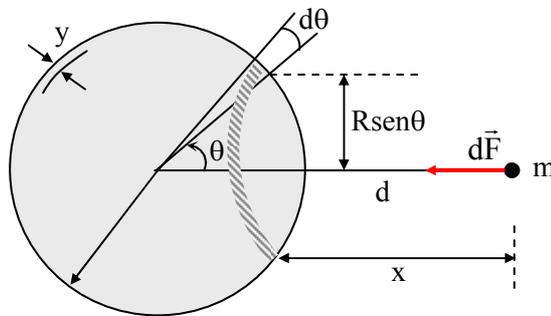


Fig. 11.2 – Geometria para o cálculo da força gravitacional devido a uma casca esférica de massa.

É fácil ver que uma esfera pode ser formada por vários anéis justapostos. A idéia então é dividir a esfera em anéis, usar a equação para cada um desses anéis e somar sobre todos eles, obtendo a força total exercida pela esfera.

Vamos considerar um determinado anel que forma a esfera, definido por um ângulo $d\theta$, na posição θ . Sua largura é $rd\theta$, o raio é $r\sin\theta$ e ele está a uma distância x da partícula de massa m . Assim, para utilizarmos o resultado do anel, devemos fazer as seguintes substituições:

$$d \leftrightarrow x, \quad r \leftrightarrow r \sin\theta, \quad t \leftrightarrow rd\theta$$

Com este procedimento, temos que a força devido ao anel mostrado na Fig. 11.2 sobre a partícula de massa m é:

$$dF = \frac{2\pi G m \rho y x r^2 \sin\theta d\theta}{(x^2 + r^2 \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

Como nesta expressão temos duas variáveis (x e θ), devemos deixá-la como função de uma única variável, para que se possa realizar a integração. Como $x = d - r \cos\theta$, vem que

$$dx = r \sin\theta d\theta$$

Se substituirmos x na expressão $x^2 + r^2 \sin^2\theta$, obteremos:

$$x^2 + r^2 \sin^2\theta = d^2 + r^2 - 2dr \cos\theta =$$

$$d^2 + r^2 + 2d(x-d) = r^2 - d^2 + 2dx$$

Assim, a força é dada por:

$$dF = \frac{2\pi G m \rho y r x dx}{(r^2 - d^2 + 2xd)^{\frac{3}{2}}}$$

Para termos a força devido à toda distribuição esférica de massa, devemos somar (integrar) as contribuições de todos os anéis entre $x = d - r$ e x

= $d + r$, pois a esfera é formada pela superposição de anéis nesse intervalo.

Logo,

$$F = \int_{x=d-r}^{x=d+r} dF = 2\pi Gm\rho y r \int_{d-r}^{d+r} \frac{x dx}{(r^2 - d^2 + 2xd)^{\frac{3}{2}}}$$

Essa integral pode ser facilmente calculada. No caso geral, temos a integral:

$$I = \int x(ax + b)^n dx$$

Fazendo a substituição $ax + b = \omega$, temos $x = (\omega - b)/a$, de modo que $dx = d\omega/a$ e, portanto:

$$I = \int \left(\frac{\omega - b}{a}\right) \omega^n \frac{d\omega}{a} = \int \left[\frac{\omega^{n+1}}{a^2} - \frac{b\omega^n}{a^2} \right] d\omega = \frac{1}{a^2} \frac{\omega^{n+2}}{(n+2)} - \frac{b}{a^2} \frac{\omega^{n+1}}{(n+1)}$$

Substituindo ω por $ax + b$, ficamos com:

$$\int x(ax + b)^n dx = \frac{1}{(n+2)} \frac{(ax + b)^{n+2}}{a^2} - \frac{b}{a^2} \frac{(ax + b)^{n+1}}{(n+1)}$$

Logo a nossa integral em dF identifica-o com a integral se fizermos: $n = -3/2$, $a = 2d$ e $b = r^2 - d^2$. Substituindo estes valores, ficamos com:

$$\int_{d-r}^{d+r} \frac{x}{(r^2 - d^2 + 2d.x)^{\frac{3}{2}}} dx = \left[\frac{2(r^2 - d^2 + 2d.x)^{\frac{1}{2}}}{(2d)^2} - \frac{2(r^2 - d^2)}{(2d)^2} (r^2 - d^2 + 2d.x)^{-\frac{1}{2}} \right]_{x=d-r}^{x=d+r}$$

Substituindo os limites de integração e notando que:

$$(r^2 - d^2 + 2dx)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} (d+r), & \text{para } x = d+r \\ (d-r), & \text{para } x = d-r \end{cases}$$

temos:

$$\int_{d-r}^{d+r} \frac{x dx}{(r^2 - d^2 + 2dx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2r}{d^2}$$

e, portanto:

$$F = 4\pi \frac{Gm\rho y r^2}{d^2}$$

Como o volume da casca esférica de raio r e espessura y é $V = 4\pi r^2 y$, temos que $M = 4\pi r^2 y \rho$ é massa total contida na distribuição esférica de massa, de modo que

$$F = \frac{GmM}{d^2}$$

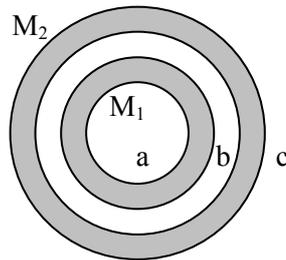
lembrando novamente que esta é uma força de atração. Assim, é como se tivéssemos duas massa pontuais separadas por uma distância d . Portanto, em termos gravitacionais, uma distribuição homogênea e esférica de massa se comporta como se toda sua massa estivesse concentrada no seu centro.

É claro que fizemos os cálculos para uma casca esférica, mas o resultado vale para uma esfera maciça, pois esta pode ser vista como sendo composta de várias cascas esféricas de raios variando entre 0 e R , bastando então tomar a soma delas. O resultado obtido vale para pontos fora da esfera. Se tivermos uma distribuição que é uma casca esférica de raio r e colocarmos no seu interior uma partícula de massa m , então devemos refazer as integrais e obtermos que a força total exercida sobre a partícula é nula.

Assim, um outro resultado importante é uma partícula de massa m colocada no interior de uma casca esférica com densidade de massa uniforme, fica sujeita a uma força nula.

Exercícios

- 1- Calcule a força gravitacional que uma partícula de massa m fica sujeita quando colocada no interior da Terra, a uma distância r de seu centro.
- 2- Consideremos duas cascas esféricas concêntricas de densidades uniformes de massa M_1 e M_2 como mostra a Fig. 11.3. Calcule a força sobre uma partícula de massa m colocada em a, b ou c.

**Fig. 11.3**

- 3- “Faz-se uma cavidade esférica numa esfera de chumbo de raio R tal que sua superfície toque a superfície externa da esfera maciça e passe pelo centro dessa. A massa primitiva da esfera de chumbo é M . Qual será a força que a esfera com a cavidade atrairá uma massa m a uma distância d do centro da esfera externa, de modo que a massa e o centro da esfera e da cavidade estejam alinhados?” (Questão retirada do exame “olímpico” da Universidade Estatal de Moscow (1946)).
- 4- Mostrar que num túnel cavado através da Terra, ao longo de uma corda e não ao longo de um diâmetro, o movimento de um objeto será harmônico simples.
- 5- Mostrar através de argumentos geométricos que uma partícula de massa m colocada no interior de uma casca esférica de densidade uniforme de massa fica sujeita a uma força nula, qualquer que seja a posição da partícula. O que aconteceria se a densidade superficial de massa não fosse constante?

- 6- Considere o movimento de um míssil intercontinental, lançado segundo inclinação θ_0 como mostrado na Fig. 11.4, com velocidade v_0 , na posição indicada. Calcule a trajetória do corpo.

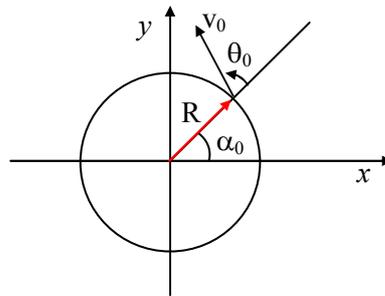


Fig. 11.4

- 7- Três corpos idênticos de massa M estão localizados nos vértices de um triângulo equilátero de lado L . A que velocidade eles devem mover-se se todos giram sob a influência da gravidade mútua, em uma órbita circular que circunscreve o triângulo, mantido sempre equilátero?
- 8- Considere um anel maciço de raio R e massa M . Colocamos uma partícula de massa m a uma distância d do plano do anel de modo que quando solto o corpo tem trajetória sobre a reta perpendicular ao plano do anel passando pelo centro do mesmo. Calcule o movimento do corpo de massa m ($\ll M$).
- 9- Um corpo de massa m é colocado a uma distância r_0 do centro de um planeta de massa M e raio R . Calcule a velocidade como função de r .
- 10- Considere duas massas m e $2m$ com atração gravitacional. Com que velocidade angular elas devem rodar tal que a distância d entre elas fique constante?
- 11- Um corpo de massa m é colocado a uma distância r_0 do centro de um planeta de massa M e raio R . Calcule a energia potencial para $0 \leq r \leq \infty$. Suponha que a densidade de massa do planeta seja uniforme e que a massa

m possa entrar no seu interior através de um túnel. Considere $v(\infty) = 0$. Calcule a velocidade como função de r para $r < R$ sabendo que $v(r_0) = 0$.

- 12- Considere um anel de massa M e raio R e uma partícula de massa m colocada no seu centro. Qual é a frequência para oscilações de pequena amplitude na direção perpendicular ao plano do anel?

MECÂNICA DOS FLUIDOS 12

12.1 Introdução

De um modo geral, denomina-se fluido o meio material cuja forma geométrica depende vizinhança com a qual ele se encontra em contato. Este tipo de material pode ainda escoar de um lugar para outro quando sujeito a forças externas. De acordo com estas propriedades, podemos notar que os gases e líquidos são classificados com fluidos.

Nosso estudo de mecânica dos fluidos começará pela *hidrostática*, que se refere ao caso particular em que o fluido se encontra em repouso. Posteriormente, trataremos o caso em que o fluido encontra-se em movimento, descrito pela *hidrodinâmica*. Em ambos casos, ao invés de tratarmos a força atuante sobre o sistema, usaremos o conceito de pressão, que é definida como a força aplicada por unidade de área:

$$P = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta S} \right)$$

onde ΔF é a força agindo sobre o elemento de área ΔS . É importante notar que a pressão se transmite às superfícies de um recipiente ou através de secções arbitrárias de fluido sempre perpendicularmente a estas superfícies. Por exemplo, se colocarmos um cubo de alumínio dentro de uma panela com água, as forças provocadas pelo fluido serão perpendiculares às suas faces. A pressão é uma grandeza escalar, com unidades de N/m^2 (Pascal, Pa), dyn/cm^2 , bar ($= 10^5 \text{ N/m}^2$), atm ($1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$), etc. Em mecânica dos fluidos é muito comum trabalharmos com densidade de massa, definida como $\rho = dM/dV$ onde dM é a massa contida no volume dV .

12.2 Hidrostática

Iniciamos o estudo deste tópico pela lei de Stevin, que estabelece a pressão de um fluido sujeito à gravidade. Considerando um fluido em repouso, vamos analisar um pequeno elemento de volume de área A e espessura dy , como mostrado na Fig. 12.1.

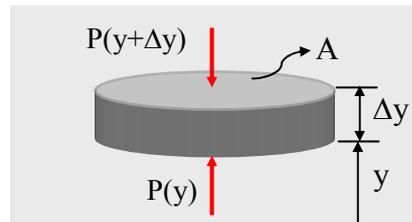


Fig. 12.1 – Elemento de volume usado para a demonstração da lei de Stevin,

A massa desta porção de fluido é dada por $\Delta M = \rho \Delta V = \rho A \Delta y$. As várias forças perpendiculares à área lateral cancelam-se mutuamente, pois o meio é isotrópico. O equilíbrio de forças ao longo da vertical estabelece que:

$$\begin{aligned}
 [P(y + \Delta y) - P(y)]A + \Delta mg &= 0 \\
 [P(y + \Delta y) - P(y)]A &= -\rho A g \Delta y \\
 \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{P(y + \Delta y) - P(y)}{\Delta y} \right) &= \frac{dP}{dy} = -\rho g
 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que a pressão diminui com a altura (taxa negativa) de uma maneira proporcional a ρ e g . No caso particular em que ρ e g independem de y (portanto constantes), a equação acima pode ser integrada entre dois pontos quaisquer, resultando em:

$$P_2 = P_1 - \rho g(y_2 - y_1)$$

Um dos casos mais comuns que aparece na literatura é quando y_1 está na superfície e y_2 no interior do líquido tal que $y_2 < y_1$. Chamado $y_1 - y_2 = h$ e $P_1 = P_a$ (pressão atmosférica), obtemos:

$$P(h) = P_a + \rho gh$$

Como exemplo da aplicação desta lei, vamos analisar como varia a pressão do ar atmosférico como função da altitude. A densidade varia com y , como veremos a seguir, mas suporemos que a temperatura seja constante. Partindo da equação dos gases ideais (equação de Clapeyron) temos:

$$PV = NK_B T = \frac{m}{M} K_B T \Rightarrow P = \frac{m}{V} \frac{K_B T}{M} = \rho \frac{K_B T}{M}$$

onde m é a massa de gás contida no volume V , M é a massa de cada molécula e K_B é a constante de Boltzmann. Como supusemos que T é constante, temos:

$$\rho = \rho_0 \frac{P}{P_a}$$

onde P_a é a pressão na superfície e ρ_0 , a densidade de massa neste ponto. Como vimos anteriormente,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dy} &= -\rho g = -\frac{\rho_0 g}{P_a} P \\ \Rightarrow \frac{dP}{P} &= -\frac{\rho_0 g}{P_a} dy \end{aligned}$$

Integrando esta expressão de $y = 0$ até $y = h$ obtemos:

$$P = P_a \exp\left\{-\frac{\rho_0 g}{P_a} y\right\}$$

Tomando $P_a = 1 \text{ atm}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ e $\rho_0 = 1.2 \text{ Kg/m}^3$, temos $\rho_0 g / P_a = 0,116 \text{ Km}^{-1}$ e assim podemos fazer um gráfico de $P(y)$ como mostrado na Fig. 12.2.

Um outro exemplo comum onde a lei de Stevin é aplicada é o dos vasos comunicantes, mostrados na Fig. 12.3, onde são colocados dois líquidos não miscíveis, de densidades diferentes. De acordo com o *princípio de Pascal*, a pressão aplicada a um fluido contido num recipiente é transmitida integralmente a todos os pontos do fluido e às paredes do recipiente.

Como a pressão na altura y_0 , definida pela linha horizontal na altura L é a mesma nos dois lados do recipiente, temos:

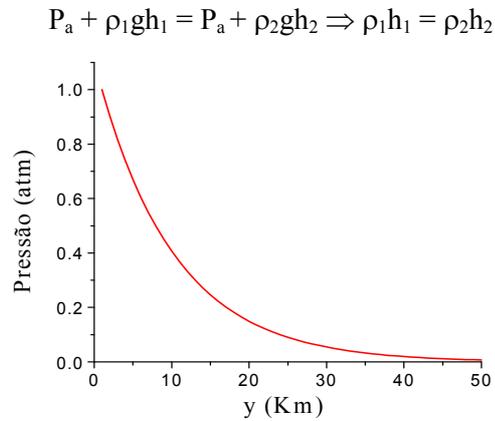


Fig. 12.2 – Variação da pressão atmosférica com a altura.

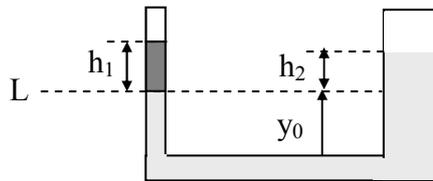


Fig. 12.3 – Vasos comunicantes.

Um terceiro exemplo deste tópico é o de um fluido em rotação. Consideremos um líquido colocado dentro de um recipiente cilíndrico, que roda com velocidade angular constante, ω , em torno do eixo de simetria do cilindro, de acordo com a Fig. 12.4. Queremos determinar o formato da superfície do cilindro.

Vamos supor que as coordenadas de um ponto qualquer desta superfície sejam r e y , onde r tem sua origem no eixo de simetria do cilindro e y no ponto mais baixo da superfície. Vamos tomar um elemento de volume no interior do líquido, na forma de um anel de raio r e espessura Δr . Chamaremos a área lateral deste anel de A . A diferença entre as forças existentes nas áreas laterais, externa e interna do anel deve ser igual à força centrípeta. Portanto,

$$[P(r + \Delta r) - P(r)] A = \Delta m \omega^2 r = \rho A \Delta r \omega^2 r$$

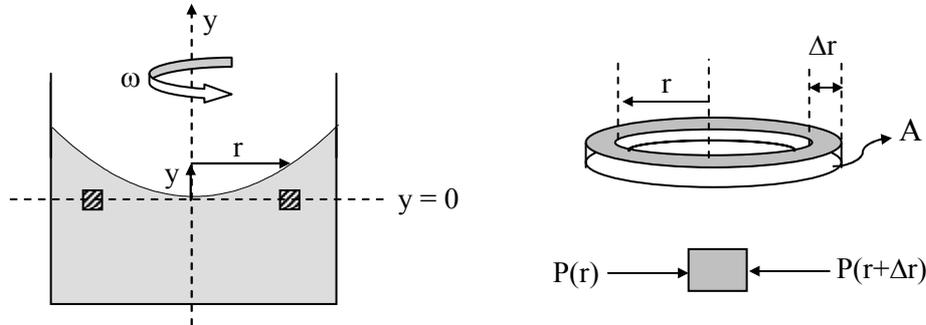


Fig. 12.4 – Fluido em rotação.

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left[\frac{P(r + \Delta r) - P(r)}{\Delta r} \right] = \frac{dP}{dr} = \rho \omega^2 r$$

Logo, $P(r) = P_a + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2$, pois o ponto $r = 0$ pertence à superfície, cuja pressão é a atmosférica (P_a). Por outro lado, a pressão independe da direção e se olharmos para a pressão no ponto r ao longo da vertical, ela será dada pela lei de Stevin:

$$P(r) = P_a + \rho g y$$

onde y é a altura da coluna de líquido sobre o ponto r . Igualando as pressões calculadas nas direções radial e vertical temos:

$$y(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

de onde concluímos que a superfície do líquido forma uma parábola.

12.3 Princípio de Arquimedes

Um corpo imerso num fluido qualquer tem seu peso aparentemente diminuído. Isto pode ser explicado pelo *princípio de Arquimedes*, que veremos a seguir. Vamos considerar um cubo de aresta L imerso num fluido como mostra a Fig. 12.5.

O peso do corpo é dirigido para baixo e vale

$$\omega = Mg = \rho_c Vg$$

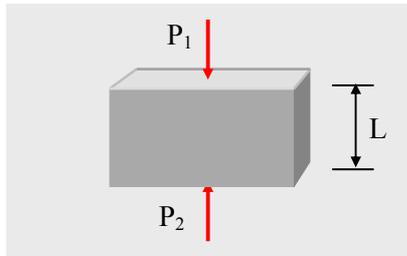


Fig. 12.5 – Cubo imerso num fluido.

Por outro lado, sabemos que a pressão na parte inferior do cubo é maior que na superior e vale:

$$P_2 = P_1 + \rho gL$$

Desta forma, temos uma força dirigida para cima, chamada de *força de empuxo*, cujo valor é:

$$F = (P_2 - P_1)A = \rho gLA = \rho Vg$$

sendo, portanto, igual ao peso do volume de líquido deslocado. Assim, todo corpo imerso ou parcialmente imerso sofre uma força oposta à gravidade, que é igual ao peso do fluido deslocado. Este resultado é conhecido como *princípio de Arquimedes*. A força exercida sobre corpos submersos aparece devido ao fato de que o fluido exerce pressão em todos os pontos do corpo, mas as regiões de maior profundidade estão sujeitas a pressões mais elevadas. Assim, existe sempre uma força de empuxo na vertical e de baixo para cima. Esta força não depende do formato do corpo, embora nós tenhamos usado um cubo para deduzir sua expressão. Poderíamos, por exemplo, ter usado uma esfera para esta dedução. Neste caso, para a esfera de raio R mostrada na Fig. 12.6, a pressão é função do ângulo θ :

$$P(\theta) = P_0 + R(1 - \cos \theta)\rho g$$

A área mostrada na figura é: $dA = 2\pi R \sin\theta R d\theta$ e a força exercida sobre ela é:

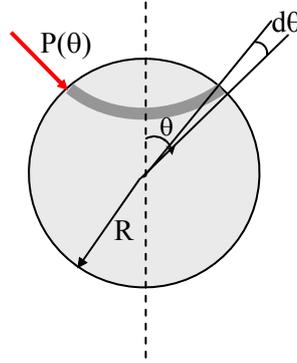


Fig.12.6 – Força de empuxo sobre uma esfera.

$$dF = P(\theta) dA = P(\theta) 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

As componentes horizontais desta força se cancelam mutuamente, restando apenas a componente vertical $dF_y = dF \cos\theta$. Logo, a força resultante na direção y é:

$$F_y = \int_0^\pi dF \cos\theta = 2\pi R^2 \int_0^\pi [P_0 + R(1 - \cos\theta)\rho g] \sin\theta \cos\theta d\theta$$

Fazendo $\cos\theta = u$ temos $du = -\sin\theta d\theta$ e assim:

$$F_y = -2\pi R^2 \int_{-1}^1 [P_0 + R(1 - u)\rho g] u du = -2\pi R^3 \rho g \int_{-1}^1 u^2 du$$

$$F_y = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g = \rho V g$$

12.4 Dinâmica dos fluidos

Para descrever-se o movimento dos fluidos é usual analisar-se o comportamento de elementos infinitesimais de volume deste fluido, isto é, é necessário conhecer-se $\rho(\vec{r}, t)$ e $\vec{v}(\vec{r}, t)$ para cada ponto e instante de tempo. No caso particular em que \vec{v} independe do tempo, temos um *fluxo estacionário*

(ou lamelar). Caso contrário, temos um fluxo não estacionário ou turbulento.

Alguns outros conceitos importantes na análise da dinâmica dos fluidos devem ser introduzidos. Por exemplo, se ρ variar com \vec{r} ou t , o fluido é *compressível* e quando isto não ocorre temos então um fluido *incompressível*. Analogamente ao atrito, o escoamento de um fluido pode ser *viscoso*. A viscosidade introduz forças tangenciais entre camadas do fluido que possuem movimento relativo, resultando em dissipação de energia.

Quando o fluxo é lamelar, a trajetória de um determinado elemento do fluido é chamada de *linha de corrente*. Da mesma forma que na mecânica da partícula, a velocidade do fluido é tangente à linha de corrente. Se tomarmos as linhas de corrente que tangenciam uma dada área, como mostrado na Fig. 12.7, teremos um *tubo de corrente* ou tubo de escoamento. Não há transporte de matéria pela superfície lateral deste tubo, já que por definição, o movimento do fluido é sempre tangente a esta superfície.

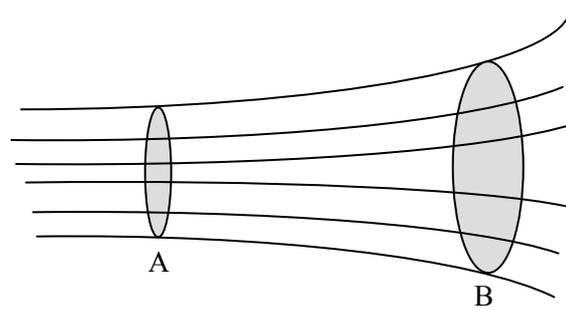


Fig. 12.7 – *Tubo de corrente.*

Durante um certo intervalo de tempo Δt , a quantidade de massa transportada através das superfícies A e B, de áreas S_A e S_B é:

$$\Delta m_A = \rho_A S_A v_A \Delta t$$

$$\Delta m_B = \rho_B S_B v_B \Delta t$$

O fluxo de massa é definido por $\Phi = \Delta m / \Delta t$. Como a massa não está sendo criada nem destruída, $\Delta m_A = \Delta m_B$. Logo:

$$\rho_A v_A S_A = \rho_B v_B S_B$$

ou seja, $\Phi = \rho v S =$ constante ao longo do tubo de corrente. Quando ρ é constante (fluido incompressível) temos $\Theta = S v =$ constante, que é chamada de *vazão*.

12.5 Teorema de Bernoulli

Os conceitos que vamos discutir agora são importantes para a análise do empuxo sobre as asas de um avião, para a medida da velocidade de um fluido, etc. Consideremos o escoamento de um fluido não viscoso e incompressível através de um tubo de corrente mostrado na Fig. 12.8.

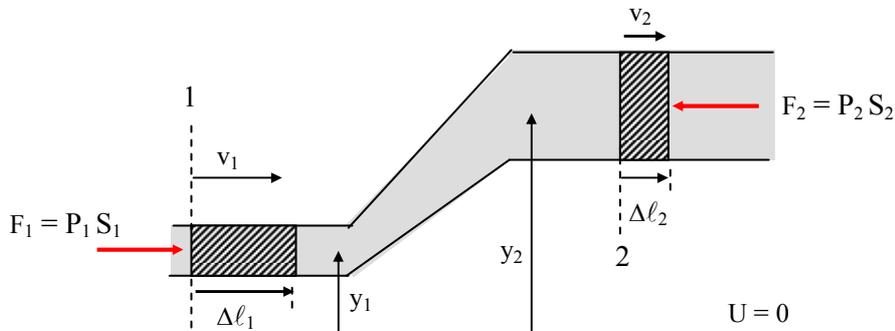


Fig. 12.8 – Tubo de corrente usado para a demonstração do teorema de Bernoulli.

No lado esquerdo do tubo, temos uma área S_1 e fluido escoando com velocidade v_1 a uma altura y_1 e pressão P_1 . No lado direito, estas grandezas são dadas respectivamente por S_2 , v_2 , y_2 e P_2 .

Inicialmente vamos calcular o trabalho feito pelas forças F_1 e F_2 sobre o volume do fluido compreendido entre (1) e (2) durante um intervalo de tempo Δt .

$$W = F_1 \Delta l_1 - F_2 \Delta l_2 = P_1 S_1 v_1 \Delta t - P_2 S_2 v_2 \Delta t$$

como $S v \Delta t = \Delta m / \rho$ (= volume), podemos re-escrever W como:

$$W = \frac{\Delta m}{\rho} (P_1 - P_2)$$

Este trabalho produz uma variação na energia mecânica do sistema, que pode ser a como se a região achurada em (1) da Fig.12.8, tenha sido promovida a (2). Assim,

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 + \Delta m g y_2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 - \Delta m g y_1$$

Igualando ΔE com W e cancelando Δm , obtemos:

$$\frac{1}{\rho} (P_1 - P_2) = \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 + g y_2 - g y_1$$

$$\Rightarrow P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$

de onde concluímos que a grandeza $P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y$ é constante ao longo do tubo de corrente. O termo $\rho g y$ vem da lei de Stevin e $\frac{1}{2} \rho v^2$ é a pressão dinâmica, enquanto que P é a pressão estática. A igualdade acima é conhecida como *teorema de Bernouilli*. Se o meio for viscoso, temos que incluir nesta equação um termo representando a dissipação de energia. A seguir, vamos analisar alguns exemplos onde a equação de Bernouilli se aplica.

O *tubo de Venturi*, mostrado na Fig. 12.9, é utilizado para a medida da velocidade de escoamento de um fluido.

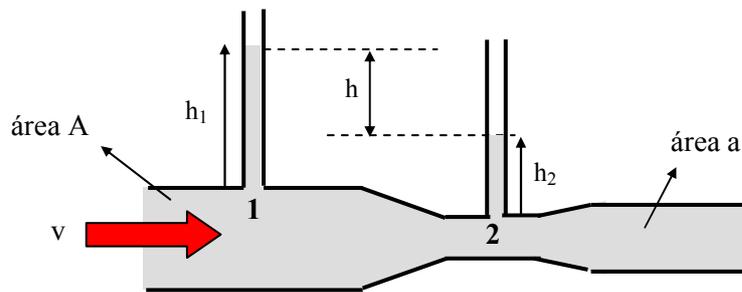


Fig. 12.9 – *Tubo de Venturi*.

A pressão estática no ponto 1 é dada por $P_1 = P_a + \rho gh_1$ e no ponto 2, $P_2 = P_a + \rho gh_2$. Levando-se em conta que os pontos 1 e 2 estão à mesma altura, o teorema de Bernouilli nos dá:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

onde $v_1 = v$ e $v_2 = Av/a$. Esta última igualdade vem do fato que a vazão é constante ($Av = av_2$). Portanto,

$$P_a + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_a + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho \frac{A^2}{a^2} v^2$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 \left(1 - \frac{A^2}{a^2}\right) = \rho g(h_2 - h_1) = \rho g(h_1 - h_2) = -\rho gh$$

e conseqüentemente,

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1}}$$

O *empuxo dinâmico* é a denominação dada à força que surge sobre um corpo que se desloca dentro de um fluido (ao contrário do empuxo estático do princípio de Arquimedes). Consideremos uma bola movimentando-se com velocidade v dentro de um fluido. Por conveniência, usaremos um referencial solidário a bola, no qual ela está em repouso e o fluido desloca-se com velocidade $-v$. Se a bola estiver rodando com velocidade angular ω , os pontos de sua periferia arrastarão as moléculas do ar, modificando sua velocidade. De acordo com a Fig. 12.10 as velocidades nos pontos (1) e (2) são dadas por $v_1 = v_{aR} - \omega R$ e $v_2 = v_{aR} + \omega R$. Aparecerá, portanto, uma diferença de pressão dada por:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho \left[v (v_{aR} + \omega R)^2 - v (v_{aR} - \omega R)^2 \right]$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = 2\rho v_{aR} \omega R$$

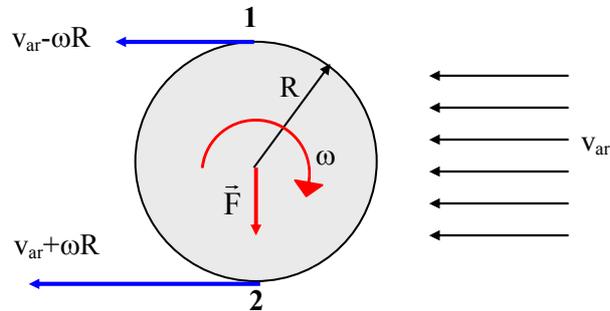


Fig. 12.10 – Bola com rotação movendo-se num fluido.

Esta diferença de pressão produz uma força F , que obriga a bola a descrever uma trajetória curva. Note que se $\omega = 0$, esta força será nula e a trajetória da bola é retilínea.

Um outro exemplo de empuxo dinâmico ocorre com a asa de um avião ou com o aerofólio de um carro de corrida. Na asa do avião, mostrada na Fig. 12.11, o ar percorre uma distância maior na parte de cima, tendo portanto, maior velocidade naquela região. Como conseqüência, a pressão na parte de baixo da asa é maior do que em cima e isto dá sustentação ao avião. Já no aerofólio de um carro de corrida, temos uma asa invertida que provoca uma força para o chão.

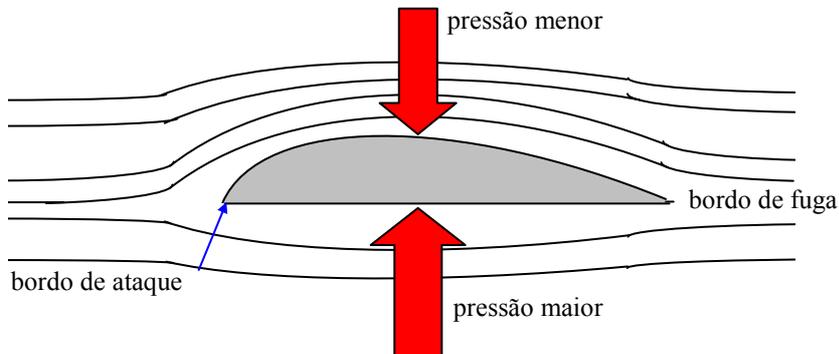


Fig. 12.11 – Asa de avião.

Como um último exemplo do teorema de Bernouilli, vamos considerar

o escoamento de um líquido através de um orifício situado na lateral de um grande reservatório, mostrado na Fig. 12.12. Numa primeira etapa, desprezaremos o movimento da superfície do líquido no tanque.

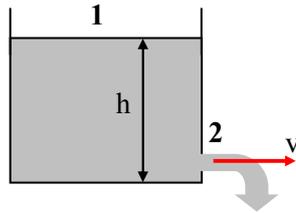


Fig. 12.12 – Fluido vazando de um reservatório.

Nestas condições, teremos entre os pontos (1) e (2):

$$P_1 + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g 0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Como estamos considerando $v_1 \approx 0$ e $P_1 = P_2 = P_a$ temos:

$$v_2 = v = \sqrt{2gh}$$

Vamos agora levar em conta a velocidade da superfície superior de área A para calcular a velocidade com que o líquido emerge do orifício de área a . Como a vazão é constante temos $A v_1 = a v_2 \Rightarrow v_1 = v_2 a/A = v a/A$. Substituindo na equação de Bernoulli dada acima ficamos com:

$$\rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{a}{A} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - (a/A)^2}}$$

Como em geral $a \ll A$, podemos expandir o denominador em série de Taylor:

$$v \cong \sqrt{2gh} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{A} \right)^2 + \dots \right]$$

12.6 Viscosidade

Vamos considerar um fluido colocado entre duas placas, onde a superior desloca-se com velocidade Δv como mostra a Fig. 12.13. Nesta situação surge sobre a placa inferior uma tensão de cisalhamento (força/área da placa) tentando arrastá-la junto com a outra.

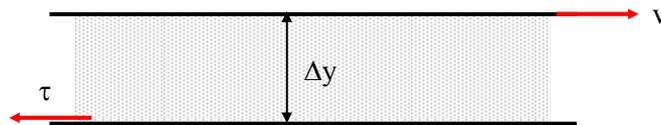


Fig.12.13 – Placa arrastada num fluido.

É necessário, portanto, uma tensão τ para mantê-la em repouso. Experimentalmente determina-se que:

$$\tau = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

onde a constante η é chamada de *viscosidade* do fluido. Note que a viscosidade está relacionada com o poder que um fluido em movimento tem de arrastar os corpos em contato com ele ou as camadas vizinhas do fluido. Isto é bastante semelhante ao atrito existente entre dois corpos em contato, com movimento relativo. Nem todos os fluidos obedecem a expressão acima; aqueles que obedecem são chamados de *fluidos newtonianos*. Um outro ponto importante é que a expressão acima só é válida para fluxos estacionários (escoamento lamelar).

Vamos considerar o escoamento lamelar de um fluido viscoso através de um tubo de diâmetro D (Fig. 12.14). Analisaremos o balanço de forças sobre um elemento de volume de raio r .

O deslocamento deste elemento de volume no interior do fluido gera a tensão de cisalhamento τ indicada na figura, que funciona como atrito sobre a porção considerada. Por outro lado, existe uma variação de pressão ao longo do tubo e como o fluxo é estacionário, a somatória das forças sobre o elemento de volume é nula:

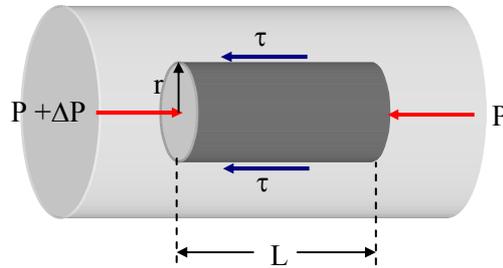


Fig. 12.14 – Escoamento por um tubo.

$$\pi r^2 \Delta P = 2\pi r L \tau$$

$$\tau = \Delta P \frac{r}{2L} = -\eta \frac{dv}{dr}$$

onde nesta última passagem usamos o fato de se tratar de um fluido newtoniano e que v diminui com r . Logo,

$$dv = -\frac{1}{2\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) r dr$$

Para encontrarmos $v(r)$ faremos uma integral de $r = 0$ até r . No centro do tubo ($r = 0$) a velocidade é máxima (v_{\max}). Portanto,

$$v(r) = v_{\max} - \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \frac{1}{4\eta} r^2$$

onde $\Delta P/L$ é a queda de pressão por unidade de comprimento. Para encontrarmos o valor de v_{\max} , levamos em conta que $v = 0$ para $r = D/2$. Assim,

$$v_{\max} = \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \frac{1}{4\eta} \left(\frac{D}{2} \right)^2$$

e, portanto,

$$v(r) = v_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{D/2} \right)^2 \right] = \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \frac{1}{4\eta} \left(\frac{D}{2} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{r}{D/2} \right)^2 \right]$$

que representa a parábola mostrada na Fig. 12.15.

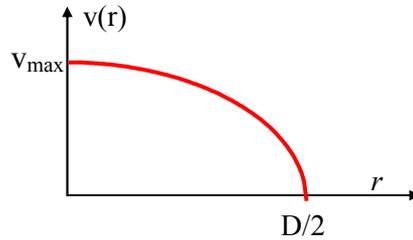


Fig. 12.15 – Distribuição radial de velocidades de um fluido escoando por um cano.

Desta forma, o perfil de velocidades para o escoamento lamelar de um fluido numa tubulação é parabólico, sendo máximo no centro, como mostra a Fig.12.16. É como se fosse uma antena de carro sendo esticada.

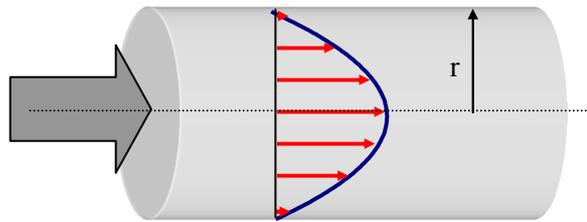


Fig. 12.16 – Fluido escoando por um cano.

Na prática, estamos sempre interessados em encontrar a vazão Θ como função da viscosidade, diâmetro e comprimento da tubulação para um certo valor de diferença de pressão aplicada. Considerando o elemento de área em forma de anel mostrado na Fig. 12.17, temos:

$$d\Theta = v(r) dA = v_{\max} \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right] 2\pi r dr$$

Para encontrarmos o fluxo total, integramos de $r = 0$ até $r = D/2$:

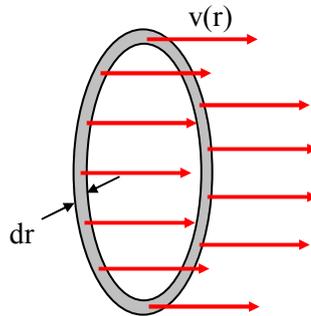


Fig. 12.17 – Elemento de área usado para cálculo da vazão.

$$\Theta = \pi v_{\max} \frac{D^2}{8} = v_{\max} \frac{A}{2}$$

onde A é a área do tubo. Como $A = \pi R^2$, podemos ainda escrever:

$$\Theta = \frac{\pi}{8\eta} R^4 \left(\frac{\Delta P}{L} \right)$$

de onde vemos que a vazão é proporcional à quarta potência do raio. A equação acima leva o nome de *lei de Poiseuille*.

Exercícios

- 1- Uma bola de madeira de densidade ρ_m está presa a uma profundidade h num líquido de densidade ρ_L . Soltando-se a bola do repouso, determine que altura acima da superfície ela atingirá.
- 2- Três recipientes com fundos falsos (Fig. 12.18) foram colocados na água, a uma mesma profundidade. Colocando-se nos três frascos a mesma quantidade de óleo, qual dos três fundos cairá primeiro? Justifique.
- 3- Um depósito retangular sem tampa, com as dimensões dadas na Fig. 12.19, move-se com aceleração a e contém água até uma altura h (quando $a = 0$). Para que o valor da aceleração a água começará a escoar para fora?
- 4- Um cubo de um certo material flutua num recipiente contendo mercúrio

($\rho_{\text{Hg}} = 13.6\text{g/cm}^3$) tal que $1/4$ de seu volume fica submerso. Acrescentando-se ao sistema água suficiente para cobrir o cubo ($\rho_{\text{água}} = 1\text{g/cm}^3$), que fração de seu volume ainda permanecerá imersa no mercúrio?

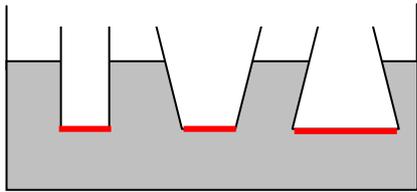


Fig. 12.18

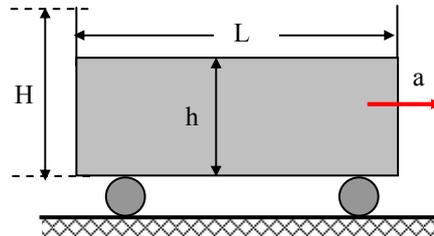


Fig. 12.19

- 5- Uma tábua de comprimento L está apoiada numa pedra e parcialmente imersa na água. Conforme mostra a Fig. 12.20, uma porção de comprimento a encontra-se acima do ponto de apoio. Sendo d a densidade da madeira, que parte da tábua encontra-se submersa?

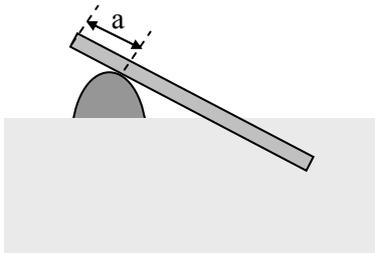


Fig. 12.20

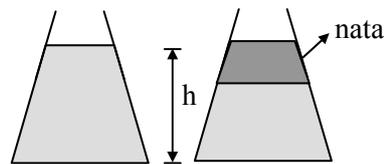


Fig. 12.21

- 6- Dentro de um recipiente cônico coloca-se leite. Com o passar do tempo ocorre formação de nata, que sendo menos densa fica no topo. Durante este processo não há variação de volume, isto é, h permanece constante (Fig. 12.21). O que acontece com a pressão no fundo do recipiente? Justifique sua resposta.
- 7- Numa lata cilíndrica de área A coloca-se água até uma altura h . Determine a velocidade v com que a água sai por um orifício de área a localizado no fundo. Que quantidade de água deve ser adicionada à lata por unidade de

tempo tal que v seja constante?

- 8- Caso não se adicione água na lata do problema anterior e a altura variar, calcule a vazão Θ como função do tempo.
- 9- Com um sifão retira-se água de um recipiente como indicado na Fig. 12.22. A área do cano é constante ao longo de seu comprimento e a velocidade da superfície do líquido é desprezada. a) Qual é a velocidade da água na saída do cano? b) Qual é a pressão no ponto mais alto do sifão? c) Qual é a máxima altura h para a qual ainda é possível sifonar a água?

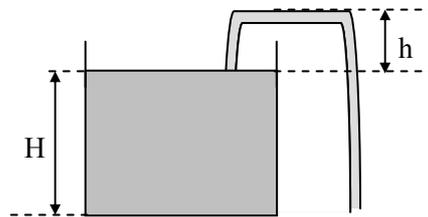


Fig. 12.22

- 10- Monta-se uma caixa d'água sobre um vagão que pode se mover no plano horizontal sem atrito (Fig. 12.23). Na parede da caixa existe um orifício de área A a uma profundidade H , pelo qual sai água paralelamente ao plano horizontal. A massa total inicial do sistema (caixa, água e vagão) é M_0 e a velocidade da superfície da água é desprezada. Se o vagão está inicialmente em repouso quando o orifício é aberto, qual será a aceleração inicial do sistema?

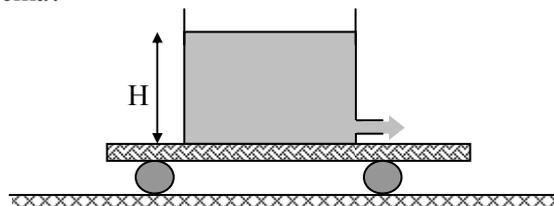


Fig. 12.23

- 11- Um tubo de água roda com velocidade ω em torno de um eixo vertical conforme mostra a Fig. 12.24. Calcule a pressão como função de r , usando

$$P(r = 0) = P_0.$$

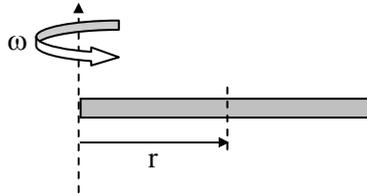


Fig. 12.24

- 12- Um rotâmetro (medidor de vazão) consiste num tubo de vidro cônico e vertical com uma esfera metálica de massa m e raio r no seu interior como mostra a Fig. 12.25. Calcule o fluxo de um gás de viscosidade η como função da altura h . Considere α bem pequeno. Nota: $F_{\text{stokes}} = 6\pi\eta r v$.

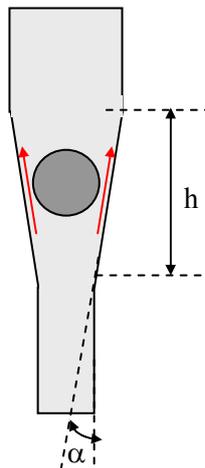


Fig. 12.25

TERMOLOGIA E TERMODINÂMICA 13

13.1 Introdução

Em geral, para caracterizarmos um sistema com N partículas é necessário especificarmos a posição, velocidade e aceleração de cada partícula como função do tempo. No caso de um sistema macroscópico, o número de partículas é extremamente grande e esta tarefa se torna muito difícil. Uma alternativa para abordar este problema é a de trabalharmos com valores médios, que representam o comportamento do sistema como um todo. Vamos começar esta abordagem definindo as grandezas macroscópicas que determinam o estado do sistema.

Consideremos um gás constituído de N moléculas num recipiente de volume V . Microscopicamente, o movimento de cada partícula é retilíneo uniforme até que ela se choque com a outra molécula ou com as paredes do recipiente. Este tipo de movimento, mostrado na Fig. 13.1, é chamado de browniano. A distância média que a partícula percorre entre duas colisões sucessivas denomina-se caminho livre médio.

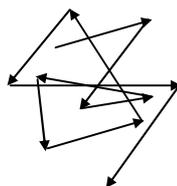


Fig. 13.1 – Representação do movimento browniano.

Os choques das partículas com as paredes do recipiente implicam em transferências de momentum e, conseqüentemente, numa força média exercida sobre as paredes. Esta força por sua vez dá origem à pressão que o gás exerce

sobre as paredes e esta é uma grandeza macroscópica (com origem microscópica) que descreve uma propriedade média do sistema global. Além da pressão, existem outras grandezas macroscópicas importantes para a descrição do sistema: volume V , energia interna e temperatura, ambas associadas ao movimento translacional, vibracional e rotacional das moléculas. O objetivo da termodinâmica é relacionar estas grandezas macroscópicas, que podem ser medidas experimentalmente.

Quando as propriedades macroscópicas de um sistema não se alteram com o tempo, dizemos que ele está em equilíbrio termodinâmico. Neste caso, o sistema de interesse deve ser mantido em contato com um segundo sistema, chamado de reservatório ou banho térmico, que determina os parâmetros do equilíbrio. O conjunto das grandezas macroscópicas associadas a um sistema em equilíbrio tem o nome de estado macroscópico. Convém notar que o estado microscópico do sistema determina o estado macroscópico, porém a recíproca não é verdade porque a partir de valores médios é impossível especificar-se \vec{r} e \vec{p} para todas as partículas do sistema.

As grandezas macroscópicas estão de alguma forma interconectadas. Para verificarmos isto, podemos tomar um pistão contendo gás, como esquematizado na Fig. 13.2, e aquecê-lo. Neste caso, a temperatura do sistema aumentará. Se mantivermos a posição do pistão fixa, haverá um aumento de pressão. Se por outro lado deixarmos o pistão solto, haverá um aumento de volume. Assim, tanto o aumento da pressão como o de volume são conseqüências do aumento da temperatura, de onde concluímos que estas grandezas estão, de alguma forma, relacionadas.

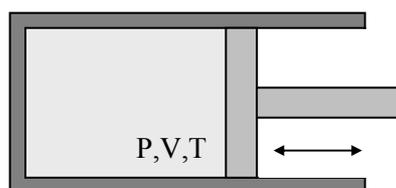


Fig. 13.2 – Cilindro com pistão contendo gás.

Se tivermos dois sistemas térmicos em contato, é importante sabermos a maneira pela qual um interage com o outro. Esta interação freqüentemente é feita através de paredes, como a mostrada na Fig. 13.3. Se a parede for fixa e variarmos a temperatura de um dos sistemas, podemos ter duas situações: (i) a temperatura do outro sistema não se altera e, neste caso, temos uma parede perfeitamente isolante (também chamada parede adiabática) ou (ii) a temperatura do outro sistema acompanha as mudanças do primeiro e, neste caso, temos uma parede diatérmica.

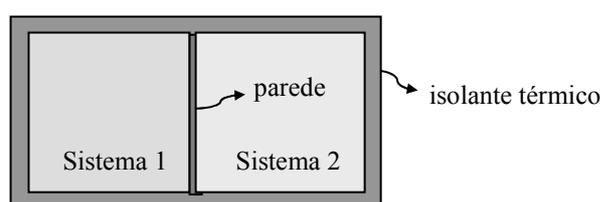


Fig. 13.3 – Interação entre dois sistemas através de uma parede.

No caso (ii), as temperaturas dos dois sistemas evoluem até atingirem um valor comum. Quando as temperaturas dos dois sistemas forem iguais, dizemos que eles estão em equilíbrio térmico.

13.2 Medida da temperatura

Normalmente, a temperatura é medida através da observação de alguma grandeza sensível à sua variação. O sistema utilizado para este fim é chamado de termômetro, para o qual é definida uma escala de temperatura. Os exemplos mais comuns de termômetro são:

(i) Termômetro de Mercúrio – Coloca-se um certo volume de mercúrio num tubo capilar de vidro e observa-se a dilatação térmica do mercúrio como função da temperatura. O comprimento da coluna de mercúrio varia de forma aproximadamente linear com a temperatura, e assim podemos escrever:

$$T = aL + b$$

onde T é a temperatura, geralmente em graus Celsius, L é o comprimento da coluna de mercúrio e a e b são duas constantes que dependem das temperaturas de referência escolhidas. Convencionalmente são escolhidas as temperaturas de fusão do gelo (ponto tríplice) como 0°C e de ebulição da água como 100°C , de forma a termos:

$$a = \frac{100}{L_v - L_g} \quad \text{e} \quad b = -\frac{100L_g}{L_v - L_g}$$

(ii) Termômetro a gás – Já neste caso, a pressão de um gás é utilizada como grandeza termométrica. Conforme mostra a Fig. 13.4, o volume do gás é mantido constante movendo-se a coluna da direita e a medida da temperatura está diretamente ligada à leitura da altura h desta coluna.

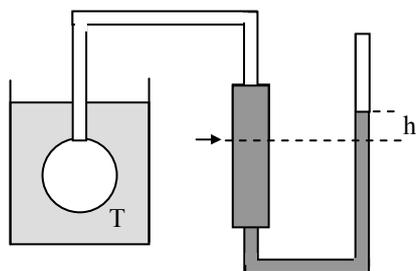


Fig. 13.4 - Termômetro a gás.

Como veremos adiante, a pressão e a temperatura de um gás são proporcionais de forma que $T = AP + B$, com:

$$A = \frac{100}{P_v - P_g} \quad \text{e} \quad B = -\frac{100P_g}{P_v - P_g}$$

onde P_g é a pressão do gás no ponto tríplice da água (0°C) e P_v é a pressão no ponto de ebulição da água (100°C).

Informalmente, utilizamos acima a escala de temperatura Celsius (ou centígrada), que é bastante comum no nosso dia a dia. Esta escala usa como

referência o ponto tríplice da água (0°C) e o ponto de ebulição da água (100°C).

Uma outra escala de temperatura muito importante, principalmente do ponto de vista de aplicações científicas, é a escala Kelvin (ou absoluta). Ela é baseada em propriedades microscópicas da matéria, como veremos adiante. O zero desta escala corresponde ao ponto em que toda energia (exceto a de ponto zero) é retirada do sistema. Esta escala será relacionada com a Celsius através da expressão: $T_K = T_c + 273.15$.

Uma outra escala que é bastante utilizada em alguns países é a escala Fahrenheit, que se relaciona com a Celsius através da expressão: $T_F = 9/5T_c + 32$

13.3 Equação de estado

A equação de estado é a relação matemática existente entre as várias grandezas macroscópicas que definem o estado de um sistema. De um modo geral, o conhecimento da equação de estado permite o conhecimento de todas as propriedades termodinâmicas do sistema.

Para gases com pressões muito baixas, as interações entre as moléculas do sistema podem ser desprezadas. Neste caso, o gás é chamado de ideal e o relacionamento entre as grandezas macroscópicas que definem seu estado termodinâmico é dado pela *equação de Clapeyron*:

$$PV = NK_B T$$

onde T é a temperatura absoluta (em K). N é o número de moléculas contidas no volume V e K_B é a constante de Boltzmann ($K_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K).

A equação acima também pode ser escrita em termo do número de moles, $n = N/N_A$, onde $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ é o número de Avogadro. Neste caso,

$$PV = nRT$$

onde $R = N_A K_B = 8.314$ J/mol⁰.K = 0.082 atm.ℓ/mol⁰ K é chamada de constante universal dos gases.

A equação de Clapeyron só é válida para gases ideais. Entretanto, num caso real notamos que para $T = 0$, V não pode ser zero porque as moléculas têm seu próprio volume. Assim, quando $T = 0$, $V = b$, que é o volume somado de todas as moléculas. Por outro lado, como as moléculas possuem interação atrativa em si, a pressão é nula mesmo antes de $T = 0$. Desta forma, para gases reais devemos usar a *equação de van der Waals*:

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = nRT$$

onde a e b são constantes determinadas experimentalmente para cada gás específico.

13.4 Interpretação microscópica da temperatura

Vamos considerar um gás contido num reservatório de volume V que satisfaz as seguintes hipóteses:

- (i) o gás é constituído de um número grande de partículas que colidem elasticamente entre si e com as paredes do recipiente;
- (ii) não há forças atrativas (aproximação de gás ideal);
- (iii) o movimento é completamente aleatório, não havendo direção ou posição privilegiada.

Sendo o movimento completamente aleatório (hipótese (iii)), as velocidades médias são as mesmas nas direções x , y e z . Logo:

$$\overline{v_x} = \overline{v_y} = \overline{v_z}$$

Olhando para uma pequena porção do gás nas proximidades da parede (Fig. 13.5), podemos imaginar que um grande número de partículas colidirão com esta parede. Num intervalo de tempo Δt , todas as partículas contidas no volume $A v_x \Delta t$ e movimentando-se para a direita colidirão com a superfície. Como metade das partículas caminham para a esquerda, o número de colisões no intervalo de tempo Δt é dada por:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} \rho v_x \Delta t A$$

onde $\rho = N/V$ é o número de partículas por unidade de volume.

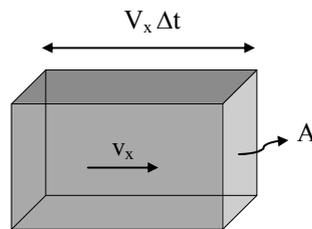


Fig. 13.5 – Moléculas colidindo com a parede de um recipiente.

Como as colisões com a parede são elásticas, cada partícula transfere uma quantidade de movimento $2mv_x$ em cada colisão, sendo m a massa da partícula. O momentum total transferido durante o intervalo de tempo Δt é:

$$\Delta p = \mathcal{N} 2mv_x = \frac{N}{V} mv_x^2 \Delta t A$$

Assim, a força média e a pressão exercidas sobre a parede são:

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{N}{V} A m v_x^2$$

$$P = \frac{\bar{F}}{A} = \frac{N}{V} m v_x^2$$

Por outro lado, como o movimento é isotrópico, temos:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 3v_x^2 \quad \Rightarrow \quad v_x^2 = \frac{1}{3} v^2$$

e, portanto, $P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m v^2$, que pode ser escrito como:

$$PV = N \frac{2}{3} \frac{m v^2}{2}$$

Comparando este resultado com a equação de Clapeyron, temos:

$$\frac{3}{2} K_B T = \frac{1}{2} m v^2$$

de onde concluímos que a temperatura está associada à energia translacional das moléculas do gás ideal. Esta expressão também é conhecida como *teorema da equipartição de energia*. De uma maneira geral, associamos a cada grau de liberdade de um sistema, o termo $1/2 KT$. No exemplo acima, temos 3 graus de liberdade, que correspondem a translações nas direções x , y e z . Se tivermos vibrações ou rotações de uma molécula, também associamos um termo $1/2 KT$ a cada um destes graus de liberdade.

Para vermos como o teorema da equipartição de energia é útil, vamos considerar um resistor R sujeito a uma certa temperatura T . Se associarmos $1/2 KT$ à potência média dissipada por ele em 1 segundo teremos:

$$\frac{\overline{V}^2}{R} = \frac{1}{2} KT \quad \Rightarrow \quad \overline{V} = \sqrt{\frac{KTR}{2}}$$

isto é, aparece uma pequena voltagem nos terminais do resistor, que é conhecido como ruído *Jonhson*. Para um resistor de 1Ω à temperatura ambiente ($T \sim 300$ K), $\overline{V} \sim 4.5 \times 10^{-10}$ V = 0.4 nV. Esta é uma voltagem extremamente pequena, mas em medidas de alta precisão ela deve ser levada em conta.

13.5 Dilatação térmica

Ao aquecermos um sólido, em geral ele muda de tamanho. Isto se deve ao fato de que a energia potencial entre seus átomos, ou moléculas, possui termos não harmônicos, como mostrado na Fig. 13.6. Ao aumentarmos a temperatura, damos mais energia ao sistema e os átomos do sólido (idealizados como estando conectados por molas) vibram com grande amplitude, produzindo em média uma separação maior entre os constituintes do sistema.

A variação do comprimento de um sólido segue a lei:

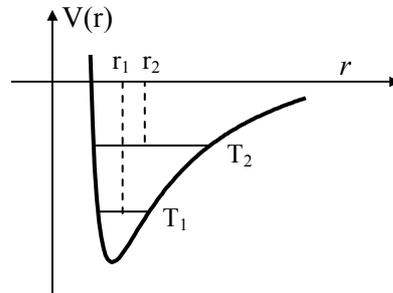


Fig. 13.6 – Energia de interação entre dois átomos.

$$\Delta L = \alpha L \Delta T$$

onde α é chamado de coeficiente de dilatação linear e é característico de cada material, como mostra a tabela.

Material	$\alpha^{\circ}(\text{C}^{-1})$
alumínio	23×10^{-6}
aço	11×10^{-6}
invar	0.7×10^{-6}
vidro	9×10^{-6}
pirex	32×10^{-6}

Como cada dimensão do sólido varia desta forma, temos:

$$\Delta L_1 = \alpha L_1 \Delta T \quad \Rightarrow \quad L_1 = L_{10} + \alpha L_{10} \Delta T = L_{10}(1 + \alpha \Delta T)$$

$$L_2 = L_{20} (1 + \alpha \Delta T) \quad \text{e} \quad L_3 = L_{30} (1 + \alpha \Delta T)$$

Para calcularmos a dilatação superficial de um corpo, fazemos: $A = L_1 L_2 = L_{10} (1 + \alpha \Delta T) L_{20} (1 + \alpha \Delta T) = L_{10} L_{20} + 2\alpha L_{10} L_{20} \Delta T + L_{10} L_{20} \alpha^2 \Delta T^2$. Como α é muito pequeno, podemos desprezar o termo α^2 e assim temos:

$$\Delta A = A_0 2\alpha \Delta T = \beta A_0 \Delta T$$

onde $\beta = 2\alpha$ e $A_0 = L_{10}L_{20}$. Da mesma forma, temos para a dilatação volumétrica:

$$\Delta V = \gamma V_0 \Delta T$$

onde $\gamma = 3\alpha$ é chamado de coeficiente de dilatação volumétrica e em geral é dependente da temperatura.

Os líquidos e os gases também sofrem, obviamente, variações de volume com a temperatura. Neste caso, é bastante comum trabalharmos com a densidade do fluido ao invés do volume:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \Delta \rho = -\frac{m}{V^2} \Delta V = -\frac{m}{V^2} \gamma V \Delta T$$

Logo, $\Delta \rho = -\gamma \rho_0 \Delta T$

Em geral γ é positivo e a densidade do fluido diminui com a temperatura. Uma exceção a esta regra é o caso da água (vide a Fig. 13.7) que abaixo de 4°C possui $\gamma < 0$ e assim, entre 4°C e 0°C a densidade aumenta com a temperatura. Isto explica porque os lagos congelam-se a partir da superfície durante o inverno, no hemisfério norte.

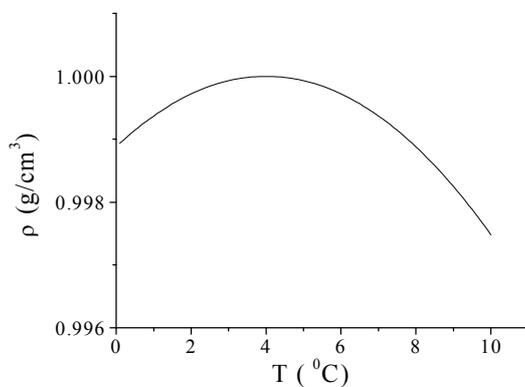


Fig. 13.7 – Variação da densidade da água com a temperatura.

13.6 Calor e trabalho

Quando colocamos dois corpos com temperaturas diferentes em contato térmico, existe transferência de energia de um corpo para o outro até que as duas temperaturas evoluam para um valor comum. No caso térmico, a energia transferida tem o nome de *calor*. Da mesma forma que no trabalho mecânico, não podemos dizer que um corpo a uma dada temperatura possui uma certa quantidade de calor. Podemos apenas dizer que calor é a variação de energia entre um ponto e outro.

Analogamente à inércia mecânica, um corpo possui uma certa inércia térmica, chamada de capacidade calorífica, que é a capacidade que um corpo tem de reter energia térmica. A definição da capacidade calorífica é:

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

A unidade de calor é J ou erg, mas também é muito comum o uso da caloria, que é a quantidade de calor necessária para elevar em 1 °C a temperatura de 1 g de água entre 14.5 °C e 15.5 °C. O equivalente mecânico da caloria é 1 cal = 4.184 J. A unidade de capacidade calorífica é, portanto, cal/°C, J/°C ou erg/°C.

Ao invés da capacidade calorífica, é comum utilizar-se o calor específico, definido como:

$$c = \frac{C}{m} \left(\frac{\text{cal}}{\text{g } ^\circ\text{C}} \right)$$

onde m é a massa do sistema. Desta forma, podemos escrever:

$$dQ = mcdT$$

significando que ao dar-se uma certa quantidade de calor ao sistema, ocorre um aumento na temperatura. Esta expressão, entretanto, não é sempre válida. Em transições de fase, de sólido para líquido ou de líquido para gás, a

temperatura não muda ao fornecermos calor ao sistema. Para uma certa massa m de material, o calor fornecido para ocorrer a transição de fase é:

$$Q = mL$$

onde L é chamado de calor latente de fusão ou de vaporização.

Quando vários corpos são colocados em contato térmico, o calor flui de um para outro de tal maneira que:

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 0$$

Isto se deve à conservação de energia e esta propriedade é importante para a determinação do calor específico de algum dos corpos. Quando o calor para de fluir, os corpos estão todos em equilíbrio térmico e, neste caso, vale a *lei zero da termodinâmica*: se um corpo A está em equilíbrio térmico simultâneo com os corpos B e C , então B está em equilíbrio com C (Fig. 13.8).

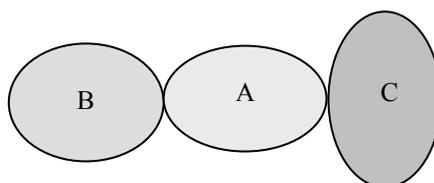


Fig. 13.8 – Corpos em contato térmico.

A injeção de calor num sistema pode ser feita através da realização de trabalho mecânico, dissipação elétrica ou iluminação. A quantidade de energia (translacional, rotacional e vibracional) contida num sistema é chamada de *energia interna*. A conservação de energia estabelece que o calor fornecido a um sistema é usado para alterar a energia interna e/ou realizar trabalho mecânico (W). Este princípio é conhecido como *1ª lei da termodinâmica* e pode ser expresso matematicamente como:

$$Q = \Delta U + W$$

Voltaremos a focar este assunto no próximo capítulo.

13.7 Transmissão de calor

O calor pode ser transmitido de três formas distintas: pela condução, radiação ou convecção. Na condução, embora seja necessário um meio material para haver a transmissão de calor, não existe transporte de massa. O que acontece é que ao aquecer uma parte de um sólido, as moléculas ali contidas vibram com amplitudes grandes e transmitem esta vibração para moléculas vizinhas. No caso dos metais, os elétrons de condução também são importantes no mecanismo de transmissão de calor.

Já no caso da convecção, o calor é transportado devido ao movimento de massa. Ao se aquecer parte de um fluido, variações de densidade e/ou pressão fazem com que a matéria se movimente, transmitindo o calor. Um exemplo típico, já citado anteriormente, é o congelamento dos lagos a partir da superfície, pois a água fria (abaixo de 4°C) é menos densa e sobe. Quando o fluido é obrigado a se mover devido à ação de algum agente externo como por exemplo, um ventilador, temos o que se chama de convecção forçada.

A terceira maneira pela qual o calor é transmitido é através da radiação. Neste caso, não é necessária a presença de um meio material para transmitir a energia. Esta transmissão é feita por intermédio de ondas eletromagnéticas, do tipo radiação infravermelha, que é emitida sempre que um corpo é aquecido.

Neste capítulo daremos uma ênfase maior à transmissão de calor pela condução. Vamos considerar uma barra de secção transversal A e comprimento L , cujas extremidades estão em contato térmico com dois corpos de temperaturas T_1 e T_2 ($T_1 > T_2$), como mostra a Fig. 13.9. Para uma determinada posição x ao longo da barra, a quantidade de calor por unidade de tempo (corrente térmica) cruzando a área A naquela posição depende dos seguintes fatores:

- (i) tipo de material da barra – tem materiais que conduzem calor melhor que outros, como por exemplo o cobre conduz calor melhor que o aço. A “facilidade” que um material possui para conduzir calor é dada pela *condutividade térmica* K .

- (ii) a área da barra – quanto maior a área da barra maior será a corrente térmica, pois teremos naquele plano mais átomos participando do processo de condução.
- (iii) o gradiente de temperatura – a corrente térmica dependerá da diferença de temperaturas entre as camadas de átomos adjacentes (à esquerda e à direita) ao plano caracterizado pela posição x .

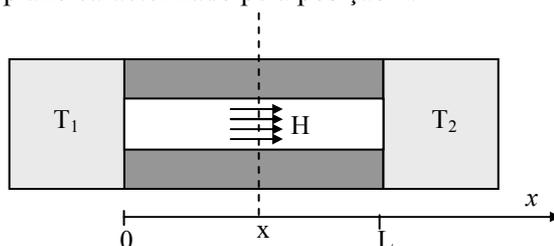


Fig. 13.9 – Condução de calor por uma barra isolada lateralmente.

Pelos argumentos expostos acima, podemos escrever a seguinte expressão para a corrente térmica H :

$$H = \frac{dQ}{dt} = -KA \frac{dT}{dx}$$

Se a barra for isolada termicamente, como é o caso da Fig. 13.9, existe conservação da corrente, ou seja, todo calor que entra numa extremidade da barra sairá pela outra, pois não existem perdas. Nesta situação, H independe de x e, conseqüentemente, dT/dx é constante. Assim,

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

e conseqüentemente,

$$H = KA \frac{T_1 - T_2}{L}$$

Neste caso, a distribuição de temperatura é uma reta, como mostra a Fig. 13.10(a). Por outro lado, se a superfície lateral da barra não for isolada, haverá perdas de calor por convecção e a corrente térmica diminuirá conforme x

aumenta. Neste caso, $|dT/dx|$ também diminui e, como consequência, temos a distribuição de temperatura mostrada na Fig. 13.10(b).

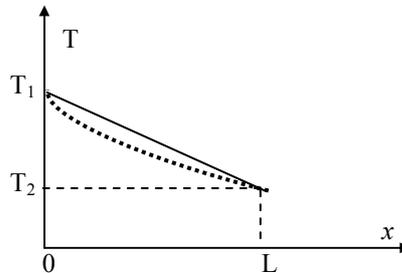


Fig. 13.10 – Distribuição de temperatura ao longo de uma barra isolada (a) e não isolada (b) lateralmente.

A seguir, vamos analisar dois exemplos onde a equação da condutividade se aplica. No primeiro exemplo, vamos considerar duas barras de mesma seção transversal, porém de materiais diferentes e condutividade diferentes, como mostra a Fig. 13.11. As barras são isoladas termicamente em suas laterais. Queremos determinar qual é a temperatura do ponto de junção.

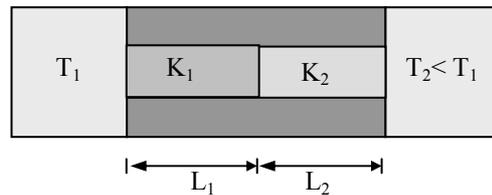


Fig. 13.11 – Barras de materiais diferentes colocadas em série.

Como as barras estão isoladas, a corrente térmica é constante e, portanto:

$$H = K_1 A \frac{T_1 - T}{L_1} = K_2 A \frac{T - T_2}{L_2}$$

de onde obtemos:

$$T = \frac{K_2 L_1 T_2 + K_1 L_2 T_1}{K_2 L_1 + K_1 L_2}$$

e após substituir na expressão para H temos:

$$H = \frac{K_1 K_2 A}{K_2 L_1 + K_1 L_2} (T_1 - T_2)$$

e no caso particular em que $K_1 = K_2$ recuperamos o resultado já conhecido da barra isolada. A distribuição de temperatura ao longo das barras depende da razão entre K_1 e K_2 . Se $K_1 > K_2$ temos a distribuição de temperatura mostrada na Fig. 13.12.

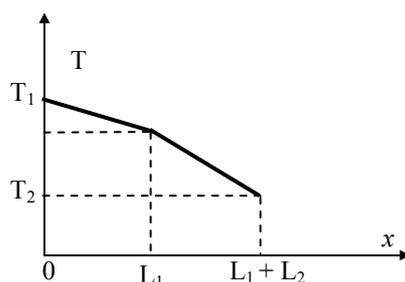


Fig. 13.12 - Distribuição de temperatura ao longo duas barras de materiais diferentes colocadas em série.

Como segundo exemplo, vamos considerar um cilindro oco, de raios a e b , como mostra a Fig. 13.13. A parte interna do cilindro é mantida a uma temperatura T_1 , enquanto que a externa é mantida em T_2 ($T_2 < T_1$). O comprimento do cilindro é L e a condutividade é K . A corrente térmica é radial. A área é dada por $A = 2\pi rL$ e, portanto:

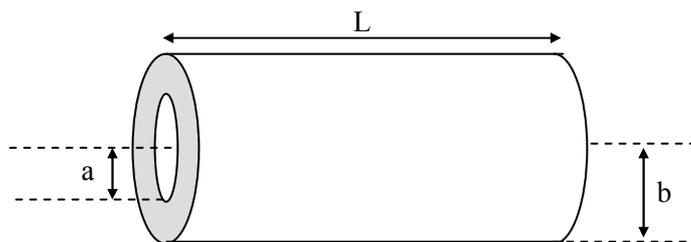


Fig. 13.13 – Cilindro oco com condução térmica radial.

$$H = -KA \frac{dT}{dr} = -K2\pi rL \frac{dT}{dr}$$

Como H é constante, pois não há perdas, podemos integrar esta igualdade para $a \leq r \leq b$ e no caso em que $T_1 \geq T \geq T_2$. Como resultado temos:

$$H = \frac{2\pi LK}{\ln(b/a)}(T_1 - T_2)$$

Para finalizar este capítulo, vamos abordar rapidamente os outros dois tipos de transmissão de calor mencionados no início. Na convecção, estamos interessados no seguinte tipo de problemas: dado um corpo a uma temperatura T envolvido pelo ar atmosférico (mais frio) tal que o corpo está mais quente ΔT quando comparado com o ar, quanto calor ele perde por unidade de tempo? A corrente térmica do corpo para o ar tem uma forma similar a da condução térmica:

$$H = hA\Delta T$$

onde A é a área onde está havendo perda de calor e h é um número que depende de ΔT (em geral $h \propto \Delta T^{1/4}$), da geometria do corpo e sua orientação no espaço, já que a convecção se deve ao fato que o ar quente sobe. Portanto, uma placa deitada tem um h diferente ao de uma placa em pé.

A transmissão de calor por radiação é proporcional a T^4 , como T sendo a temperatura absoluta (Kelvin):

$$R = e\sigma T^4$$

Aqui, R é a corrente térmica emitida por unidade de área, e é a emissividade do corpo ($0 \leq e \leq 1$) e σ é a constante de *Stefan-Boltzmann* ($\tau = 5.7 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2(^{\circ}K)^4}$).

Exercícios

- 1- Na perfuração de um bloco de latão ($c = 0.1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$) de 500 g, é fornecida uma potência de 300 W durante 2 minutos. Qual é o aumento de temperatura do bloco se 75% do calor gerado o aquece? O que acontece com os 25% restantes?
- 2- Suponha que o calor específico de um corpo varia com a temperatura de acordo com a expressão $c = A + BT^2$, onde A e B são constante e T em $^\circ\text{C}$. Compare o valor médio de c entre $T = 0$ e $T = T_1$, com seu valor em $T_1/2$.
- 3- Considere um corpo sólido com momento de inércia I. Mostre que devido a uma pequena variação de temperatura ΔT , este momento varia de $\Delta I = 2\alpha\Delta T$, onde α é o coeficiente de dilatação linear. Com este resultado, calcule de quanto varia o período de um pêndulo físico sujeito a uma variação de temperatura ΔT .
- 4- Mostre que a corrente térmica em uma substância de condutividade K situada entre as superfícies de duas esferas concêntricas é dada por:

$$\frac{dQ}{dt} = H = (T_1 - T_2) \frac{4\pi k r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

onde r_1 e r_2 são respectivamente os raios das superfícies interna e externa e $T_1 > T_2$.

- 5- Um sistema termodinâmico é levado do estado inicial A a outro B e depois trazido de volta a A pelo ponto C, como ilustra o diagrama da Fig. 13.14. Calcule o trabalho realizado pelo sistema para efetuar o ciclo completo.

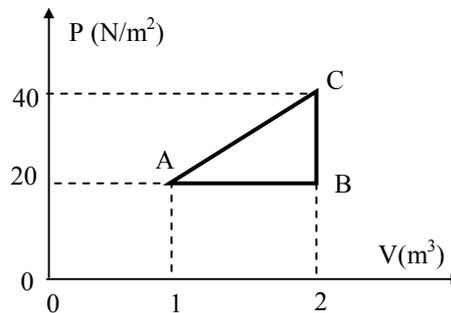


Fig. 13.14

- 6- Uma barra com coeficiente de dilatação térmica α e módulo de Young Y ($\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L}$) está presa entre duas paredes, conforme mostra a Fig. 13.15.

Calcule a tensão na barra quando a temperatura é acrescida de ΔT .

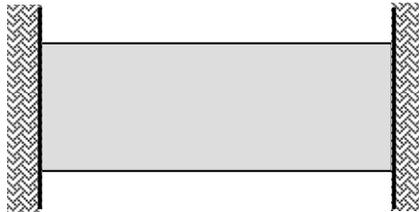


Fig. 13.15

- 7- Qual a quantidade de calor necessária para transformar 1g de gelo a -10°C ($c_{\text{gelo}} = 0,55 \text{ cal/g } ^{\circ}\text{C}$, $L_f = 80 \text{ cal/g}$) em vapor a 100°C ($L_v = 540 \text{ cal/g}$)?
- 8- Coloca-se uma barra de metal ($C = 0,2 \text{ cal/g } ^{\circ}\text{C}$) a 100°C sobre um grande bloco de gelo a 0°C . Qual é a massa da barra se quando o sistema atingir o equilíbrio térmico 500 g de gelo se derreteram?
- 9- Coloca-se um bloco de gelo a -20°C dentro de um recipiente hermeticamente fechado com 200g de vapor de água a 100°C . Se a massa do gelo é 500 g, qual será a temperatura final do sistema?

- 10- Encontre o gradiente de temperatura e a corrente térmica numa barra de condutividade K , comprimento L e secção transversal irregular, como mostra a Fig. 13.16.

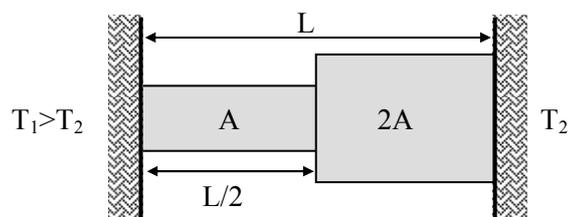


Fig. 13.16

- 12- Duas barras de materiais diferentes, com comprimentos, módulos de Young e coeficientes de dilatação térmica dados respectivamente por L_1 , L_2 , Y_1 , Y_2 , α_1 e α_2 , estão presas entre duas paredes como mostra a Fig. 13.14. Calcule a distância percorrida pelo ponto de junção das barras quando o sistema é aquecido de ΔT . Qual é a tensão nas barras?

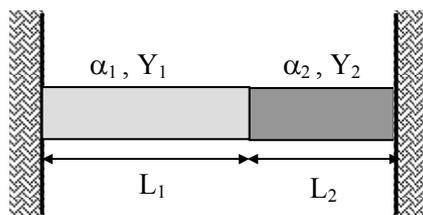


Fig. 13.17

TERMODINÂMICA DO GAS IDEAL 14

14.1 Introdução

Consideremos um gás ideal contido num cilindro com pistão como mostrado na Fig. 14.1. Mediante a movimentação de êmbolo, é possível comprimir ou expandir tal gás e neste processo haverá variação de pressão e/ou temperatura já que estas variáveis estão vinculadas pela equação do gás ideal ($PV = NKT$).

Imaginemos que a pressão P do gás é maior que a pressão atmosférica. Neste caso, a tendência do gás é empurrar o pistão para fora do cilindro. Se o pistão desloca-se lentamente uma distância dx , o trabalho realizado pelo gás será:

$$\Delta W = Fdx = P A dx = PdV$$

onde A é a área do pistão expansão e $dV = A dx$ corresponde à variação de volume durante a expansão.

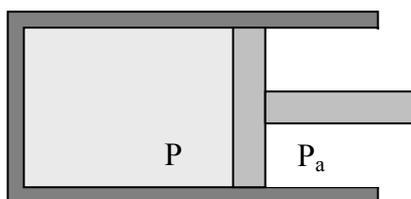


Fig. 14.1 – Gás ideal num cilindro com pistão.

Assim, se imaginarmos o gás expandindo-se de um volume V_1 até um volume V_2 , o trabalho total realizado é:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV$$

Se acompanharmos a evolução da pressão com volume num diagrama PV, como o da Fig. 14.2, o trabalho realizado pelo gás será a área sobre a curva. Esta área depende de como o gás é levado do ponto 1 ao ponto 2.

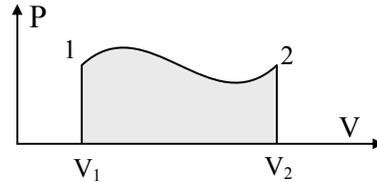


Fig. 14.2 – Diagrama PV de um gás.

A Fig. 14.3 mostra dois possíveis caminhos que podem levar o gás do ponto inicial ao final. No processo (a), inicialmente o sistema sofre uma transformação isobárica (pressão constante), seguida de uma transformação isocórica (volume constante). Já no processo (b) temos inicialmente uma transformação isocórica seguida de uma isobárica.

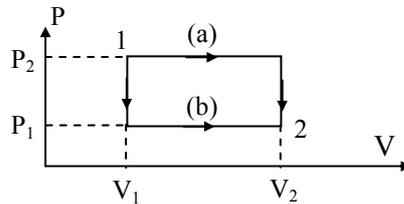


Fig. 14.3 – Trabalho realizado em dois processos diferentes.

Analisando as áreas sob as curvas (a) e (b), vemos que no primeiro caso, o trabalho realizado é $P_2 (V_2 - V_1)$ enquanto que no segundo, o trabalho é $P_1 (V_2 - V_1)$. Embora os processos sejam diferentes, eles produzem a mesma variação da energia interna do gás $\Delta U = U_2 - U_1$, já que esta só depende dos estados inicial e final do sistema. O trabalho realizado é diferente em cada processo e portanto, pela 1ª lei da termodinâmica, o calor transferido também o será.

Vamos agora imaginar um processo (Fig. 14.4) no qual o sistema é conduzido de um estado 1 até um estado 2 através de um caminho A e trazido de volta a 1 por um outro caminho B, fechando desta forma o ciclo de transformação.

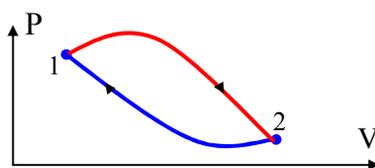


Fig. 14.4 – Trabalho realizado num ciclo completo do gás.

Durante o ciclo completo, a variação total da energia interna é nula e portanto

$$W = Q$$

de modo que todo o calor absorvido pelo gás foi usado na realização de trabalho, não contribuindo em nada para a alteração da energia interna do sistema.

A energia interna de um gás ideal, como já discutimos anteriormente, provém essencialmente da energia cinética de seus constituintes, de modo que:

$$U = \frac{3}{2} NK_B T$$

e assim, nos processos onde não há alteração de temperatura, $\Delta U = 0$. Esta relação foi verificada experimentalmente por Joule, através de uma expansão adiabática (sem troca de calor) do gás, como mostrado na Fig. 14.5. Um gás isolado termicamente expande no vácuo, mudando seu volume de V_1 para $V_1 + V_2$, após a remoção da partição mostrada. Embora haja variação de volume, o trabalho realizado pelo gás é nulo, pois a pressão da interface é nula. Por outro lado, devido ao fato da parede ser isolante, $Q = 0$ e pela 1ª lei da termodinâmica $\Delta U = 0$. Assim, se $U = U(T)$, a não variação da energia interna implica na não variação da temperatura. De fato, Joule observou que a temperatura indicada pelo termômetro T acoplado ao sistema não muda durante o processo.

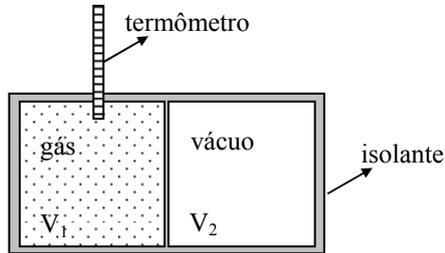


Fig. 14.5 – Expansão livre de um gás.

14.2 Capacidade térmica

Como o gás ideal pode sofrer transformações tanto isocóricas quanto isobáricas, definimos dois tipos de capacidade térmica:

(i) à volume constante: $C_v = (dQ/dT)_v$. Como V é constante, $dV = 0$ e $dW = 0$. Logo: $C_v = dU/dT$.

(ii) à pressão constante: $C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = \frac{dU}{dT} + \left(\frac{dW}{dT}\right)_p = C_v + \left(\frac{dW}{dT}\right)_p$. Para um gás ideal, $PV = nRT$ e, portanto, $PdV + VdP = nRdT$. Como estamos tratando de um processo onde a pressão é constante, $dP = 0$. Logo, $dW = PdV = nRdT$ e conseqüentemente,

$$C_p = C_v + nR$$

14.3 Tipos de expansões

(a) expansão quase estática - O processo é denominado de quase estático quando é executado lentamente, de modo que a variação das grandezas termodinâmicas é infinitesimalmente pequena entre dois passos consecutivos do processo. Obviamente, o experimento de Joule discutido anteriormente não é uma expansão quase-estática.

(b) expansão isotérmica - Neste caso, a temperatura é mantida constante. Sabemos que para o gás ideal $PV = nRT$, logo $P = (nRT)(1/V)$ e esta curva no

diagrama PV da Fig. 14.6 é chamada de isoterma.

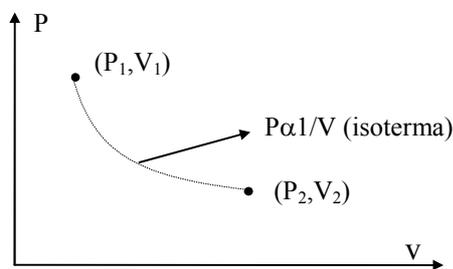


Fig. 14.6 – Expansão isotérmica.

Na isoterma de um gás ideal ($PV = nRT$) temos: $PdV + VdP = nRdT = 0 \Rightarrow dW = PdV = -VdP$. Entretanto,

$$P = \frac{nRT}{V} \Rightarrow dP = -\frac{nRT}{V^2}dV \Rightarrow dW = nRT \frac{dV}{V}$$

e assim, o trabalho realizado quando o gás vai de V_1 a V_2 é:

$$W_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} nRT \frac{dV}{V} = nRT \ln(V_2/V_1)$$

(c) expansão adiabática - Nesta transformação o sistema encontra-se termicamente isolado tal que $Q = 0$. Neste caso, há variação da temperatura do gás, como pode ser visto pela Fig. 14.7, de modo que o processo inicia-se numa isoterma T_1 e termina em outra isoterma T_2 .

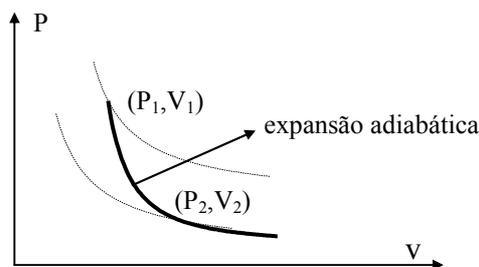


Fig. 14.7 - Expansão adiabática.

Queremos calcular qual é a relação entre P e V durante o processo

adiabático. Como $dQ = 0$, $dU = C_V dT$ e $dW = PdV$, a 1ª lei da termodinâmica pode ser escrita como: $0 = C_V dT + PdV$, e portanto, $PdV = -C_V dT$.

Da lei dos gases ideais temos que $PdV + VdP = nRdT$. Multiplicando os dois lados por C_V obtemos:

$$C_V(PdV + VdP) = nR(C_V dT) = -nRPdV$$

$$\Rightarrow PdV(C_V + nR) = -C_V VdP \quad C_p PdV = -C_V VdP$$

Definindo $\gamma = C_p/C_V$ temos: $\gamma dV/V = -dP/P$. Integrando, obtemos:

$$\gamma \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma = \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma = \frac{P_1}{P_2} \Rightarrow P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

isto é, num processo adiabático $PV^\gamma = \text{constante}$. Como para o gás ideal $PV = nRT$, obtemos uma expressão alternativa:

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}$$

Para o gás ideal $U = \frac{3}{2} nRT \Rightarrow dU = \frac{3}{2} nRdT$ e $dV = C_V dT$, logo $C_V = \frac{3}{2} nR$. Por outro lado $C_p = C_V + nR \Rightarrow C_p = \frac{5}{2} nR$ e, portanto, $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3}$ para o gás ideal.

14.4 Método de Rüchhardt para determinação de γ

O método de Rüchhardt mostrado na Fig. 14.8, permite a medida da razão $\gamma = C_p/C_V$ de um gás. Consideremos um gás contido num recipiente grande, de volume V . Conectado a este recipiente existe um tubo, cuja área da secção transversal é A , no qual uma bola de metal de massa m (que se encaixa perfeitamente no tubo) pode deslizar formando uma sistema equivalente a um pistão. Devido à compressão e descompressão do gás, esta massa oscila em torno de sua posição de equilíbrio ($y = 0$). A presença da esfera metálica faz

com que a pressão interna seja $P = P_a + mg/A$ na posição de equilíbrio, onde P_a é a pressão externa (atmosférica). Chamaremos de τ o período de oscilação.

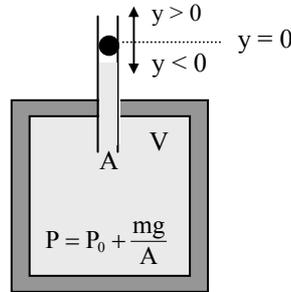


Fig. 14.8 - Método de Rüchhardt para determinação de γ .

Dando um deslocamento y na esfera, a variação do volume do gás é $\Delta V = yA$, de forma a haver uma variação de pressão ΔP acompanhando ΔV . Este incremento na pressão produz uma força restauradora $F = \Delta PA$. Supondo que o processo seja quase estático e adiabático temos:

$$PV^\gamma = \text{const.} \Rightarrow \gamma PV^{\gamma-1} \Delta V + V^\gamma \Delta P = 0$$

Usando $\Delta P = F/A$ e $\Delta V = yA$, obtemos:

$$\gamma PV^{\gamma-1} yA + V^\gamma F/A = 0$$

de onde tiramos: $F = -\frac{\gamma PA^2}{V} y$, que nos leva à seguinte equação de movimento:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\gamma PA^2}{V} y = 0$$

que é a equação diferencial de um movimento harmônico simples de frequência:

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma PA^2}{mV}$$

e período:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{mV}{\gamma P A^2}}$$

Desta forma, conhecendo-se P , V , m e A , podemos medir τ e obter γ como sendo

$$\gamma = \frac{4\pi^2 mV}{A^2 P \tau^2}$$

Exercícios

- 1- Um gás ideal, inicialmente com pressão P_1 e volume V_1 , expande-se adiabaticamente até a pressão P_2 e volume V_2 . Mostre que o trabalho realizado é $W = (P_1 V_1 - P_2 V_2)/(\gamma - 1)$ onde $\gamma = C_p/C_v$
- 2- Calcule o rendimento ($\eta = W/Q_1$, $Q_1 =$ calor recebido pelo sistema) do ciclo do Otto (Fig. 14.9).
- 3- Calcule o rendimento do ciclo de Carnot (Fig. 14.10).

4-

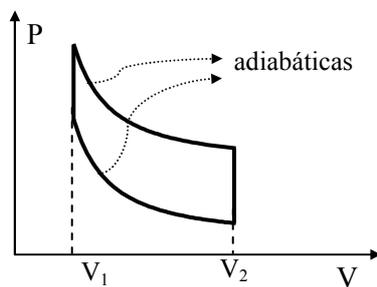


Fig. 14.9

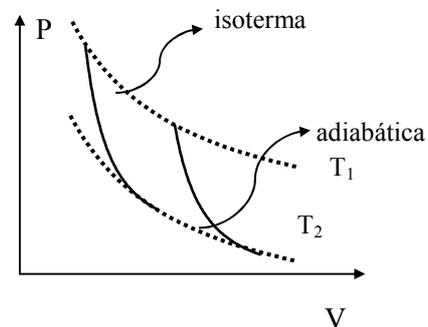


Fig. 14.10

- 5- Explique porque o calor específico a volume constante é menor que o calor específico a pressão constante.
- 6- Calcule o coeficiente de dilatação volumétrica de um gás ideal à pressão constante.

- 7- Calcule o coeficiente de dilatação volumétrica de um gás ideal durante uma expansão adiabática.
- 8- Calcule a compressibilidade $\left(K = \frac{1}{V} \frac{dV}{dP}\right)_T$ de um gás ideal.
- 9- A velocidade média das moléculas de um gás ideal é 500 m/s. Se o gás mantiver a mesma temperatura e as massas moleculares forem duplicadas, qual será a nova velocidade média?
- 10- Mostre que para um gás diatômico $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5}$
- 11- Calcule o trabalho realizado na expansão isotérmica de V_1 a V_2 de um gás real.
- 12- Considere o ciclo térmico mostrado na Fig. 14.11. a) Calcule o calor fornecido ao sistema na isoterma $1 \rightarrow 2$, b) Calcule o trabalho na isobárica $2 \rightarrow 3$ e c) Calcule o calor fornecido ao sistema na isocórica $3 \rightarrow 1$

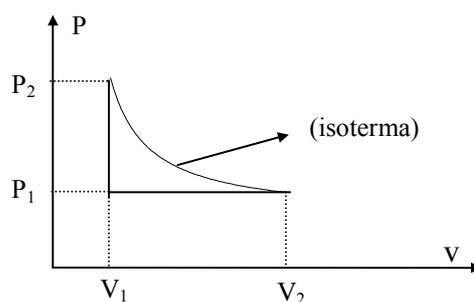


Fig. 14.11

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS 15

Capítulo 1

$$1.1 - 5\sqrt{2}, \quad \vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$1.5 - a) \vec{a} \cdot \vec{b} = 4, \quad \vec{a} + \vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + 7\hat{k}, \quad \vec{a} - \vec{b} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k},$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 17\hat{i} - 10\hat{j} - \hat{k}$$

$$b) \vec{a}_{//} = -\frac{2}{7}\hat{i} - \frac{4}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}, \quad c) \vec{a}_{\perp} = \frac{16}{7}\hat{i} + \frac{25}{7}\hat{j} + \frac{22}{7}\hat{k}$$

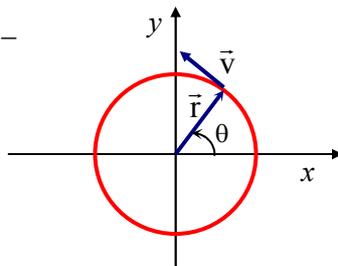
$$1.6 - b) \sqrt{29}, \quad \cos \theta = 4/\sqrt{29}, \quad \text{tg } \phi = 3/2, \quad c) \vec{a}_{//} = 3(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}), \quad d)$$

$$\vec{a}_{\perp} = -\hat{i} + \hat{k}$$

$$1.8 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad \vec{a} \times \vec{b} = 16\hat{i} - 4\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$1.9 - \vec{a}_{//} = -\frac{2}{7}\hat{i} - \frac{4}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}, \quad \vec{a}_{\perp} = \frac{16}{7}\hat{i} + \frac{25}{7}\hat{j} + \frac{22}{7}\hat{k}$$

1.10 -



$$\vec{r} = r(\cos \theta \hat{i} + \text{sen } \theta \hat{j})$$

$$\vec{v} = v_0(-\text{sen } \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j})$$

$$\vec{v} \times \vec{r} = -rv_0 \hat{k}$$

$$1.11 - \vec{v} \cdot \vec{r} = -r v_0 (-\text{sen } \theta \cos \theta + \text{sen } \theta \cos \theta) = 0$$

1.12 – a) $6x$, b) $\frac{\cos x}{x^2} - \frac{2 \operatorname{sen} x}{x^3}$, c) $e^x (1 + 2x + 4x^2 + x^3)$

d) $-\frac{x^4 + 6x^2 - 6x}{(x^2 + 3)^2}$

1.13 – a) 0, b) $-\frac{1}{\pi^2}$, c) 1, d) $-1/16$

1.14 – a) $1/x$, b) $\ln x$

1.15 – a) $20x^4$, b) $6x^2 + 8x - 5$, c) $\cos x - \operatorname{sen} x$, d) $2x$, e) $\operatorname{sen} x + x \cos x$

f) $-2/x^3$, g) $2 \frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$, h) $(1+x)e^x$, i) $\dot{y} = -\operatorname{cosec}^2 x$,

j) $\dot{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, k) $\dot{y} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$

1.16 – a) $\sec^2 x$, b) a , c) 2, d) $n x^{n-1} - \operatorname{sen} x$, e) $-\operatorname{sen} x \cos(\cos x)$, f) 1

1.17 – $\pi/4$

1.18 – a) $3x^2/2 + C$, b) $7x^3/3 + x^4 - 2x + C$, c) $-15/11 x^{11} + 8/3 x^3 + C$

1.19 – a) 6, b) $34/3$, c) $(e^2 - 1)/2$, d) $1/4$

1.20 – a) $x_0 = -1/4$, b) $y_0 = -25/8$, c) $y = 2(x + 1/4)^2 - 25/8$,

d) 1, $-3/2$, f) $19/6$

Capítulo 2

2.1 – Demonstração

2.2 – Em relação ao solo: $y_1 = 0$, $y_2 = 5/9 h$, $y_3 = 8/9 h$, $y_4 = h$, com $h = 2m$

2.3 – a) $x_{\max} = (4/27) a^3/b^2$ em $t = 2a/3b$, b) $v(t) = 2at - 3bt^2$, $v = 0$ para $t = 2a/3b$, c) $a = 2a - 6bt$, $a = 0$ para $t = a/3b$

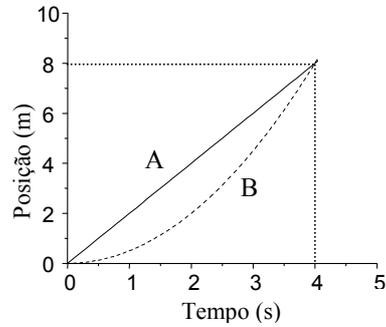
$$2.4 - d = \frac{3}{5} \left(\frac{3v_0}{2A} \right)^{2/3} v_0$$

2.5 - a) Ver figura ao lado

b) $t_C = 4$ s, c) 8 m

d) $v_B = 4$ m/s

e) 2 s



Capítulo 3

3.1 - $\alpha = (a/R)$, $\beta = (a/2R) t^2$

3.2 - $|\vec{v}_b - \vec{v}_a|^2 = \omega_b^2 r_b^2 + \omega_a^2 r_a^2 - 2\omega_a \omega_b r_a r_b \cos[(\omega_b - \omega_a) t]$

3.3 - $a_\theta = \frac{2\pi R g h}{(h^2 + 4\pi^2 R^2)}$, $a_z = -\frac{g h^2}{(h^2 + 4\pi^2 R^2)}$, $a_r = -\frac{(2\pi g h t)^2 / R}{(h^2 + 4\pi^2 R^2)^2}$

3.4 - $v_0 = \sqrt{gh \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{d}{h} \right)^2} \right)}$

3.5 - Para $R > v_0^2/g$

3.6 - $x_{\max} = -\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \cot \alpha$, $z_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$, $t = \frac{2 v_0 \sin \theta}{g \sin \alpha}$

3.7 - a) $\sin \theta = g/20 \cong 1/2 \Rightarrow \theta \cong 30^\circ$, b) $y_{\max} = g/2 \cong 5$ m, c) $R = 2 v_0 \cos \theta \cong 20\sqrt{3}$ m, d) $\theta \cong 60^\circ$

3.8 - $d = \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} + \sqrt{\frac{2}{g} \left(H + \frac{v_{0x}^2}{2g} \right)} v_{0x}$, $y_{\max} = H + \frac{v_{0y}^2}{2g}$

3.9 - a) $t_{\text{col}} = 2$ s, b) $H = 85$ m, c) $x_{\text{col}} = 100/\sqrt{3}$ m, $y_{\text{col}} = 80$ m

$$3.10 - H = \frac{g}{2} \left(\frac{v_0 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \right)^2$$

$$3.11 - \text{b) } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} \left(x - \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2g} \right), \quad \text{c) } x_{\max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2g}, \quad \text{d)}$$

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$

Capítulo 4

$$4.1 - \theta = 30^\circ$$

$$4.2 - \frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$4.3 - 2g/15 \text{ (para cima)}$$

$$4.4 - M_A = 4 \text{ Kg}$$

$$4.5 - a_A = 2 \left(\frac{M_2 - 2\mu M_1}{M_2 + 4M_1} \right) g, \quad a_B = \left(\frac{M_2 - 2\mu M_1}{M_2 + 4M_1} \right) g,$$

$$T = \frac{M_2 M_1 (2 + \mu)}{M_2 + 4M_1} g$$

$$4.6 - a_R = g \operatorname{tg} \theta. \text{ Neste caso, } N = mg / \cos \theta$$

$$4.7 - a_{\max} = \frac{\mu \cos \theta + \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta - \mu \operatorname{sen} \theta} g, \quad a_{\min} = \frac{-\mu \cos \theta + \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + \mu \operatorname{sen} \theta} g$$

$$4.8 - \text{a) } a = (2x/L - 1) g, \quad \text{b) } x = L/2$$

$$4.9 - \text{a) } F = 3Mg, \quad \text{b) } F_{\max} = 3Mg \left(\frac{1 + \mu_e}{1 - \mu_e} \right), \quad F_{\min} = 3Mg \left(\frac{1 - \mu_e}{1 + \mu_e} \right)$$

$$4.10 - d = \frac{2mv_0^{\frac{3}{2}}}{3b}$$

$$4.11 - \text{a) } a = 2/5 g, \quad \text{b) } T = 3/5 g$$

$$4.12 - a_1 = \frac{2 M_2 M_3}{4 M_1 M_2 + M_1 M_3 + M_2 M_3} g, \quad a_2 = \frac{2 M_1 M_3}{4 M_1 M_2 + M_1 M_3 + M_2 M_3} g,$$

$$a_3 = \frac{(M_1 + M_2) M_3}{4 M_1 M_2 + M_1 M_3 + M_2 M_3} g, \quad T = \frac{2 M_1 M_2 M_3}{4 M_1 M_2 + M_1 M_3 + M_2 M_3} g$$

$$4.13 - a) \operatorname{tg} \theta = F/3Mg, \quad b) T = \sqrt{\left(\frac{F}{3}\right)^2 + (Mg)^2},$$

$$c) \mu = \sqrt{1 + \left(\frac{F}{3Mg}\right)^2} + \frac{F}{3Mg}$$

$$4.14 - T_i = \frac{n-i+1}{n} F$$

$$4.15 - a) \cos \theta = \frac{v^2}{2gL} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2gL}{v^2}\right)^2} - 1 \right], \quad b) T = Mg/\cos \theta$$

$$4.16 - a = g \operatorname{cotg} \theta. \text{ Neste caso, } T = mg/\operatorname{sen} \theta$$

$$4.17 - a) \operatorname{tg} \theta_0 = \mu_e, \quad b) F_{\min} = \frac{\mu_e Mg}{\sqrt{1 + \mu_e^2}}$$

$$4.18 - a) F_{\max} = (\mu_e + \mu_c)(M_1 + M_2)g, \quad b) a_2 = \frac{F}{M_2} - \mu_c g \left(1 + 2 \frac{M_1}{M_2}\right), \quad a_1 = \mu_c g$$

$$4.19 - a) F = 2\mu Mg \cos \theta, \quad b) a = g(\mu \cos \theta - \operatorname{sen} \theta)$$

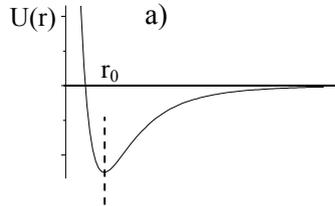
$$4.20 - a) F = \frac{m+M}{M} mg \left(\frac{\operatorname{tg} \theta + \mu}{1 - \mu \operatorname{tg} \theta}\right), \quad b) N = \frac{mg}{\cos \theta - \mu \operatorname{sen} \theta}$$

Capítulo 5

5.1 – Demonstração

$$5.2 - \Delta W = (F - 2\mu Mg) \Delta x$$

5.3 –



b) $\frac{dU}{dr} = 0$ para $r = r_0$, c)

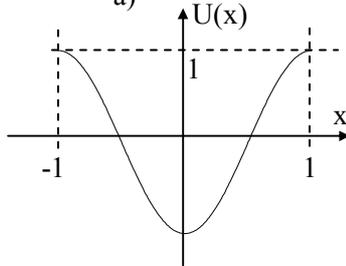
$$F(r) = -\frac{dU}{dr} = 12C \left(\frac{r_0^{12}}{r^{13}} - \frac{r_0^6}{r^7} \right),$$

d) $\Delta E = C$

5.4 – $d = 4/5 \ell$

5.5 – a) $v_0 = \sqrt{5gR}$, b) $\theta = 20.3^\circ$

5.6 – a)



b) $F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\pi \sin \pi x$

c) $v_0 = 2/\sqrt{M}$

5.7 – a) $K = mg(h-2R) = 1/2 mv_p^2$, $a_c = \frac{v_p^2}{R} = g + \frac{N}{m}$, c) $N = 0 \Rightarrow h =$

$$5/2R, \text{ d) } N(\theta) = mg \left(\frac{2h}{R} - 2 - 3 \cos \theta \right)$$

5.8 – a) 1 m, b) 0.79 m, c) $H = L \sin 30^\circ = 1.72 \text{ m}$

5.9 – $d' = d \sqrt{1 - \frac{2gh}{v^2}}$

5.10 – $H = \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{1}{1 + \mu \cot g \theta} \right)$

5.11 – $v_0 = \sqrt{5gR}$

$$5.12 - \text{a) } v(\theta) = \sqrt{v_0^2 + 2gR(1 - \cos\theta)}, \text{ b) } N(\theta) = mg(3\cos\theta - 2) - \frac{mv_0^2}{R},$$

$$\text{c) } \cos\theta = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}$$

$$5.13 - \text{a) } U(y) = \frac{ky^2}{2} - mgy, \text{ b) } U(y) = \frac{k}{2} \left(y - \frac{mg}{k} \right)^2 - \frac{m^2g^2}{2k}, \text{ c) }$$

$$y_{\text{eq}} = \frac{mg}{k}, \text{ d) } y_{\text{max}} = \frac{2mg}{k}, \text{ e) } v_{\text{max}} = g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$5.14 - \text{a) } v(\theta) = \sqrt{v_0^2 - 2gL(1 - \cos\theta)}, \text{ b) } T(\theta) = \frac{mv_0^2}{L} - mg(2 - 3\cos\theta),$$

$$\text{c) } (v_0)_{\text{min}} = \sqrt{5gL}$$

$$5.15 - \text{a) } E_K(x) = \frac{m^2g^2}{2k} - \frac{1}{2}kx^2 - \mu mgx,$$

$$\text{b) } E_K(x) = -\frac{k}{2} \left(x + \frac{\mu mg}{k} \right)^2 + \frac{m^2g^2}{2k}(1 + \mu^2), \text{ c) } x_{\text{max}} = \frac{mg}{2k}$$

$$\text{d) } 3/4$$

$$5.16 - \text{a) } E_i = 2mgR + 1/2 kR^2,$$

$$\text{b) } E(\theta) = 1/2 mv^2 + mgR(1 + \cos\theta) + 1/2 kR^2$$

$$\text{c) } v^2(\theta) = 2gR(1 - \cos\theta), \text{ d) } N(\theta) = kR + mg(3\cos\theta - 2)$$

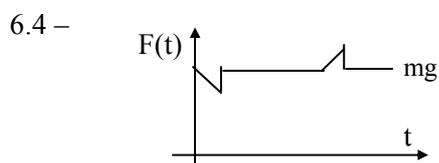
$$\text{d) } k = 5mg/R$$

Capítulo 6

$$6.1 - V = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\left(1 + \frac{M}{m}\right)}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{\frac{M}{m} + \sin^2\theta}}$$

$$6.2 - t = 1.48 \text{ s}$$

$$6.3 - v = 57.14 \text{ cm/s}$$



$$6.5 - h = \frac{1}{2g} \left[v_0^2 - \left(\frac{Mg}{\Phi} \right)^2 \right]$$

$$6.6 - v = \sqrt{\frac{g}{K}} \operatorname{tgh}(\sqrt{Kg} t)$$

$$6.7 - v = 61.6 \text{ m/s}$$

Capítulo 7

$$7.1 - v_{1f} = \frac{v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} + \frac{2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad v_{2f} = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} + \frac{v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

$$7.2 - \theta_B = 90^\circ \text{ e } \operatorname{tg}\theta_A = \frac{1}{2}, \Delta E_K = E_{Ki} (3 - 5m_B/m_A)$$

$$7.3 - \cos \theta = 1 - \frac{m^2}{(m + M)^2} \frac{v^2}{2gL}$$

$$7.4 - \text{a) } h = \frac{9}{32} \frac{m^2 v^2}{M^2 g}, \text{ b) } -\frac{\Delta E}{E_i} = \frac{1}{16} \left(15 - \frac{9m}{M} \right)$$

$$7.5 - \text{a) } V_{CM} = \frac{mv_0 + MV}{m + M},$$

$$\text{b) } p_{1f} = \frac{mM}{m + M} (V - v_0), \quad p_{2f} = \frac{mM}{m + M} (v_0 - V)$$

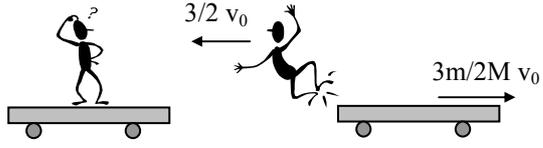
$$\text{c) } v_{1f} = \frac{2MV - v_0(M - m)}{M + m}, \quad v_{2f} = \frac{2mv_0 - V(M - m)}{M + m}$$

$$7.6 - \text{a) } v_f = 3 \text{ m/s}, \text{ b) } \Delta E = -9 \text{ J}$$

$$7.7 - \text{a) } v_0 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} x, \text{ b) } I = \frac{3}{2}\sqrt{km} x, \text{ c) } -\frac{\Delta E}{E_i} = \frac{3}{4}$$

7.8 – Demonstração

$$7.9 - \text{a) } V_{\text{CM}} = v_0, \text{ b) } V = \left(1 + \frac{3m}{2M}\right)v_0, \text{ d) } E_{\text{Kr}} = \frac{9m}{4M}E_i,$$

e) $V_{\text{CM}} = \frac{\frac{3}{2}m + M}{m + M} v_0$, c) 

$$7.10 - v_1 = V_{\text{CM}} - \sqrt{\frac{m_2 k}{m_1(m_1 + m_2)}} x, v_2 = V_{\text{CM}} + \sqrt{\frac{m_1 k}{m_2(m_1 + m_2)}} x$$

$$7.11 - x_{\text{max}} = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} (v_1 - v_2)$$